§2 Vektorräume und lineare Abbildungen

Vektorräume

2.1 Definition (Vektorraum)

Sei K ein Körper. Eine Menge V mit den Abbildungen

$$\begin{array}{lll} + : V \times V \to V, & (v,w) \mapsto v+w & \text{("Vektoraddition")} \\ \cdot\ : K \times V \to V, & (\lambda, v) \mapsto \ \lambda \cdot v & \text{("skalare Multiplikation")} \end{array}$$

heißt Vektorraum über K oder K-Vektorraum, wenn gilt:

(a) $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe

(b) $\lambda \cdot (v+w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \qquad (\lambda \in K,\ v,w \in V)$

(c) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \qquad (\lambda, \mu \in K,\ v \in V)$

(d) $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \qquad (\lambda, \mu \in K,\ v \in V)$

(e) $1 \cdot v = v \qquad (v \in V)$

Die Elemente von V heißen Vektoren, die Elemente von K Skalare.

Bemerkungen:

1. (b),(c) ähneln Distributivgesetzen
   (d) ähnelt Assoziativgesetz
   (e) i. Ohne (e) wäre z. B. die Definition $\lambda \cdot v = 0$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$ möglich. Damit wäre jede Gruppe V mit jedem Körper K ein K-Vektorraum.
   ii. Aus (d) folgt $1 \cdot (1 \cdot v) = (1 \cdot v)$, was (e) nahelegt, aber nicht erzwingt.
2. K ist K-Vektorraum.

Beispiele:

1. K^n (oder $\mathbb{R}^n$) [wichtigstes Beispiel]:
   $(v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n) := (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n) \quad (v, w \in K^n)$
   $\lambda \cdot (v_1, \ldots, v_n) := (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n) \quad (\lambda \in K,\ v \in K^n)$
   (a): $(K^n, +)$ Gruppe, weil $(K,+)$ Gruppe (ÜA 16)
   Neutrales Element: $(0, \ldots, 0)$ "Nullvektor": Bez. 0_V oder $\mathbf{0}$.
   Inverses Element zu $(v_1, \ldots, v_n)$: $(-v_1, \ldots, -v_n)$
   (b):
   $$\begin{aligned} \lambda \cdot (v+w) &= \lambda \cdot ((v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n)) \\ &\overset{Def.Add}{=} \lambda \cdot (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n) \\ &\overset{Def.skal.M.}{=} (\lambda \cdot (v_1 + w_1), \ldots, \lambda \cdot (v_n + w_n)) \\ &\overset{Distr.G.in\ K}{=} (\lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot w_1, \ldots, \lambda \cdot v_n + \lambda \cdot w_n) \\ &\overset{Def.Add}{=} (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n) + (\lambda w_1, \ldots, \lambda w_n) \\ &\overset{Def.skal.M.}{=} \lambda \cdot (v_1, \ldots, v_n) + \lambda \cdot (w_1, \ldots, w_n) \\ &= \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \end{aligned}$$
   (c)-(e): analog (evtl. ÜA)

Geometrische Deutung in $\mathbb{R}^2$: Vektoraddition mit Parallelogramm *(Skizze weggelassen)*

(a): inverses Element zu v: -v (Pfeil in umgekehrter Richtung mit Ansatz im Ursprung)

(b): Skalieren der Seiten des Parallelogramms mit dem Faktor λ bewirkt dieselbe Skalierung der Diagonalen.

(c),(d): analog

2. Sei W ein K-Vektorraum, M eine nicht leere Menge.
Dann ist $\text{Abb}(M, W) := \{f : M \to W\}$ ein K-Vektorraum mit den Operationen

$$f + g\colon M \to W, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$\lambda \cdot f : M \to W, \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

- ($\text{Abb}(M, W), +)$ ist Gruppe mit der Nullfunktion $[\,null : M \to W,\ null(x) = 0]$ als neutralem und der Funktion $-f$ $[-f : M \to W,\ x \mapsto -f(x)]$ als zu f inversem Element.
- $(\lambda+\mu)\cdot f = \lambda\cdot f+\mu\cdot f$ wegen $((\lambda+\mu)\cdot f)(x) \overset{Def}{=} \underbrace{(\lambda+\mu)}_{\in K}\cdot\underbrace{f(x)}_{\in W} \overset{(b)\ für\ Vektorraum\ W}{=}$

  $\underbrace{\lambda\cdot f(x)}_{\in W}+\underbrace{\mu\cdot f(x)}_{\in W} \overset{Def}{=} (\lambda\cdot f)(x) + (\mu\cdot f)(x)$
- (c)-(e) analog

Wir betrachten folgende drei Spezialisierungen:

2.1 $M = W = K$ mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. D.h. $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (reellwertige Funktionen auf $\mathbb{R}$) und $\text{Abb}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ (komplexwertige Funktion auf $\mathbb{C}$) sind jeweils Vektorräume.

2.2 $M = \mathbb{N}$, $W = K$ mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. D.h.
$\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}\}$ (Folgen reeller Zahlen)
$\text{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{C}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}\}$ (Folgen komplexer Zahlen)
mit
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Addition)
$\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (skalare Multiplikation)
bilden jeweils einen Vektorraum.

2.3 $M = K^n$, $W = K^m$ $(m, n \in \mathbb{N}$ fest), d.h. $\text{Abb}(K^n, K^m)$ ist ein K-Vektorraum.

2.2 Rechenregeln

Sei V ein K-Vektorraum. Dann gilt

(a) $0 \cdot v = \mathbf{0} \qquad (v \in K)$

(b) $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad (\lambda \in K)$

(c) $\lambda \cdot v = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \lambda = 0 \lor v = \mathbf{0} \quad (\lambda \in K,\ v \in K)$

(d) $(-1) \cdot v = -v \qquad (v \in K)$

Bemerkung: Ab jetzt schreiben wir einheitlich 0 für $0 \in K$ und $\mathbf{0} \in V$.

Beweis:

$$\text{(a)}\quad \left.\begin{array}{lcr} 0\cdot v+0\cdot v & \overset{2.1(c)}{=} & (0+0)\cdot v = 0\cdot v \\ 0\cdot v+0 & = & 0\cdot v \end{array}\right\} \overset{\textit{Eind. des neutr.Elements in } (V,+)}{\Longrightarrow} 0\cdot v = 0$$

$$\text{(b)}\quad \left.\begin{array}{lcr} \lambda\cdot 0+\lambda\cdot 0 & \overset{2.1(b)}{=} & \lambda\cdot(0+0) = \lambda\cdot 0 \\ \lambda\cdot 0+0 & = & 0 \end{array}\right\} \overset{\textit{Eind. des neutr.Elements in } (V,+)}{\Longrightarrow} \lambda\cdot 0 = 0$$

(c) Sei $\lambda\cdot v = 0$.

1. Fall: $\lambda = 0$: fertig

2. Fall: $\lambda \neq 0$: Dann $v \overset{2.1(e)}{=} 1\cdot v \overset{\lambda\neq 0,\ K\ \textit{Körper}}{=} (\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda)v \overset{2.1(d)}{=} \frac{1}{\lambda}\cdot(\lambda\cdot v) \overset{\textit{Vorauss.}}{=} \frac{1}{\lambda}\cdot 0 \overset{(b)}{=} 0.$

$$\text{(d)}\quad \left.\begin{array}{lcr} v+(-1)\cdot v & \overset{2.1(e)}{=} & 1\cdot v+(-1)\cdot v \overset{2.1(c)}{=} (1+(-1))\cdot v = 0\cdot v \overset{(a)}{=} 0 \\ v+(-v) & = & 0 \end{array}\right\} \overset{\textit{Eind. des inv.Elements in } (V,+)}{\Longrightarrow}$$

$\Longrightarrow (-1)\cdot v = -v$

Lineare Abbildungen, Matrizen

Beispiel für ein lineares Gleichungssystem:
Gesucht $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{array}{rcrcl} 5x_1 & + & 7x_2 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 8 \end{array}$$

Verallgemeinerung:
Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in K$ $(i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n)$, $b_i \in K$ $(i = 1,\dots,m)$.
Gesucht $x_1,\dots,x_n \in K$, so dass

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \quad (*)$$

1. Betrachtungsweise: (mit Hilfe linearer Abbildungen)
Setze

$$(\#)\left\{\begin{array}{ll} f_i : K^n \to K^m, & f_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1,\dots,m) \\ f\ : K^n \to K^m, & x \mapsto (f_1(x),\dots,f_m(x)) \\ [\text{ oder ausführlicher:} & \underbrace{(x_1,\dots,x_n)}_{\in K^n} \mapsto \underbrace{(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))}_{\in K^m}] \end{array}\right.$$

Damit wird das lineare Gleichungssystem $(*)$ zu einer Gleichung im Vektorraum K^m:
Gegeben $f : K^n \to K^m$ wie in $(\#)$, $b \in K^m$
Gesucht $x \in K^n$, so dass $f(x) = b$

Ziel: Charakterisierung von f ohne Verwendung der a_{ij}

Seien $x, y \in K^n,\ \lambda \in K$. Dann gilt für $i = 1, \ldots, m$:

$$\begin{aligned} f_i(x+y) &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j + y_j) = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}x_j + a_{ij}y_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = f_i(x) + f_i(y) \\ f_i(\lambda \cdot x) &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda x_j) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda f_i(x) \end{aligned}$$

Insgesamt also:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (f_1(x+y), \ldots, f_m(x+y)) = (f_1(x) + f_1(y), \ldots, f_m(x) + f_m(y)) \\ &= (f_1(x), \ldots, f_m(x)) + (f_1(y), \ldots, f_m(y)) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda \cdot x) &= (f_1(\lambda \cdot x), \ldots, f_m(\lambda \cdot x)) = (\lambda f_1(x), \ldots, \lambda f_m(x)) \\ &= \lambda \cdot (f_1(x), \ldots, f_m(x)) = \lambda \cdot f(x) \end{aligned}$$

2.3 Definition (lineare Abbildung, Hom(V, W))

(a) Seien V, W K-Vektorräume. $f : V \to W$ heißt lineare Abbildung oder Vektorraumhomomorphismus , wenn gilt

$$\begin{aligned} \forall v, w \in V : &\quad f(v+w) = f(v) + f(w) \\ \forall v \in V,\ \lambda \in K : &\quad f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) \end{aligned}$$

(b) Ist f zusätzlich bijektiv, so heißt f Vektorraumisomorphismus und V und W isomorphe Vektorräume.

(c) $\mathrm{Hom}(V, W) := \{f : V \to W :\ f \text{ linear}\}$ (Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W)

Bemerkungen:

1. $f : V \to W$ linear, $v_1, \ldots, v_n \in V,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \ \Rightarrow\ f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(v_i)$.

   [Denn: $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i) = f(\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n) = f(\lambda_1 \cdot v_1) + \ldots + f(\lambda_n \cdot v_n) =$

   $= \lambda_1 \cdot f(v_1) + \ldots + \lambda_n \cdot f(v_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(v_i)$]

2. $f(0) = 0$.

   [Denn: $f(0) \overset{2.2(a)\text{ für } v=0}{=} f(0 \cdot 0) \overset{f(\lambda v)=\lambda f(v)}{=} 0 \cdot f(0) \overset{2.2(a)}{=} 0$]

   In der Analysis bezeichnet man das reelle Polynom vom Grad 1 $p(x) = a \cdot x + b$ ($x \in \mathbb{R}$) gerne als linear. Im Sinne der linearen Algebra handelt es sich nur um eine lineare Abbildung, wenn $b = 0$.

3. Wir werden in Kürze sehen, dass sich jede lineare Abbildung $f : K^n \to K^m$ in der Gestalt (#) schreiben lässt.

2. Betrachtungsweise: (mit Hilfe von Matrizen)

2.4 Definition ($m \times n$-Matrix über K, $K^{m\times n}$)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in K$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$. Das rechteckige Schema mit m Zeilen und n Spalten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt $m \times n$-Matrix (über K) und wird als $(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ oder abgekürzt (a_{ij}) geschrieben.
$K^{m\times n}$ bezeichnet die Menge aller $m \times n$-Matrizen.

$a_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m} \in K^{m\times 1}$ heißt j-te Spalte von A

$a^{(i)} = (a_{i1} \ldots a_{in}) = (a_{ij})_{j=1,\ldots,n} \in K^{1\times n}$ heißt i-te Zeile von A.

Bemerkung:

1. $K^{m\times 1} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} : \; x_i \in K$ für $i = 1, \ldots, m\}$ "Spaltenvektoren"
   $K^{1\times n} = \{(x_1 \ldots x_n) : \; x_i \in K$ für $i = 1, \ldots, n\}$ "Zeilenvektoren"
   Zum Vergleich: $K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : \; x_i \in K$ für $i = 1, \ldots, n\}$ "n-Tupel"
2. Wie in Beispiel (g) zu Definition 0.23 kann jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ als eine Funktion $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to K$ aufgefasst werden.
   Man kann daher $K^{m\times n}$ mit $\mathrm{Abb}(\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}, K)$ identifizieren.

$K^{m\times n}$ ist somit nach Beispiel 2 zu Def. 2.1 ein K-Vektorraum.
Zusammengefasst:

2.5 Definition und Satz (Matrizenaddition, skalare Multiplikation)

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}, B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \in K^{m\times n}$, $\lambda \in K$.

$$\begin{aligned} A + B &:= (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} && \text{(Matrizenaddition)} \\ \lambda A &:= (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} && \text{(skalare Multiplikation)} \end{aligned}$$

Mit diesen Operationen ist $K^{m\times n}$ ein K-Vektorraum.

Bemerkung: Insbesondere gilt also nach Definition 2.1

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (A + B) &= \lambda \cdot A + \lambda \cdot B \\ (\lambda + \mu) \cdot A &= \lambda \cdot A + \mu \cdot A \\ (\lambda \cdot \mu) \cdot A &= \lambda \cdot (\mu \cdot A) \\ 1 \cdot A &= A \end{aligned}$$

und den Rechenregeln 2.2

$$\begin{aligned} \underbrace{0}_{\in K} \cdot A &= \underbrace{0}_{\text{Nullmatrix}} \\ \lambda \cdot 0 &= 0 \\ (-1) \cdot A &= -A \end{aligned}$$

Wir wollen ein Produkt zwischen Matrizen definieren:

Spezialfall:

$$\underbrace{(\alpha_1 \ldots \alpha_n)}_{\in K^{1\times n}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}_{\in K^{n\times 1}} = \underbrace{(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n)}_{\in K^{1\times 1}}$$

Verallgemeinerung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \mathbf{a_{i1}} & \ldots & \mathbf{a_{in}} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\in K^{m\times n}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \vdots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix}}_{\in K^{n\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \mathbf{a_{i1}x_1} + \ldots + \mathbf{a_{in}x_n} \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{\in K^{m\times 1}} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum\limits_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_{ij}x_j} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

d.h. $A \cdot x = b$ mit $b_i = (A \cdot x)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ (i = 1, \ldots, m)$

Allgemeiner Fall:

$$\begin{array}{cccccc} & & \text{Ersetze } x_j \text{ durch } b_{jk} & & k-\text{te Spalte} & \\ & & \downarrow & & \downarrow & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \mathbf{a_{i1}} & \ldots & \mathbf{a_{in}} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} & \cdot & \begin{pmatrix} b_{11} & \mathbf{b_{1k}} & b_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \mathbf{b_{nk}} & b_{nr} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} c_{11} & \vdots & c_{1r} \\ \ldots & \mathbf{c_{ik}} & \ldots \\ c_{m1} & \vdots & c_{mr} \end{pmatrix} & \leftarrow i-\text{te Zeile} \\ A & \cdot & B & = & C & \\ \in K^{m\times n} & & \in K^{n\times r} & & \in K^{m\times r} & \end{array}$$

d.h. $A \cdot B = C$ mit $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$

2.6 Definition (Matrizenmultiplikation)

Sei K ein Körper, $m, n, r \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \in K^{m\times n}$, $B = (b_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,r}} \in K^{n\times r}$. Dann setze

$$A \cdot B := \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,r}} \in K^{m\times r}$$

Bemerkung: Die Matrizenmultiplikation $A \cdot B$ ist nur definiert, wenn Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B.

Wir haben bereits gesehen, dass sich das lineare Gleichungssystem als Matrizenprodukt

$$\underbrace{A}_{\in K^{m\times n}} \cdot \underbrace{x}_{\in K^{n\times 1}} = \underbrace{b}_{\in K^{m\times 1}}$$

schreiben lässt. Wir gelangen so zu einer Abbildung

$$\tilde{f} : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1},\ \tilde{f}(x) = A \cdot x,$$

die in der 1. Betrachtungsweise der Abbildung

$$f : K^n \to K^m,\ f(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \right)$$

entspricht.
Bei $K^{n\times 1}$ (Spaltenvektoren) [und $K^{n\times 1}$ (Zeilenvektoren)] handelt es sich um zu K^n isomorphe K-Vektorräume. Die Matrixschreibweise ist so praktisch, dass wir in Zukunft K^n mit $K^{n\times 1}$ (und K^m mit $K^{m\times 1}$) identifizieren, d.h. Vektoren aus K^n (bzw. K^m) normalerweise als *Spaltenvektoren* schreiben.

2.7 Definition (Kroneckersymbol, Einheitsmatrix, Einheitsvektoren)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$ heißt Kroneckersymbol.

(b) $E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} \in K^{n\times n}$ heißt Einheitsmatrix (über K).

(c) Die j-te Spalte von E_n $e_j := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$ wird als j-ter Einheitsvektor von K^n bezeichnet.

Bemerkung: $e_j = (\delta_{ij})_{i=1,\ldots,n}$.

2.8 Definition und Satz (Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen)

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) Zu jeder Abbildung $f : K^n \to K^m$ existiert genau eine Matrix $A \in K^{m\times n}$, so dass

$$f(x) = A \cdot x \quad (x \in K^n).$$

Insbesondere gilt $a_{ij} = f_i(e_j)$ $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ und $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = f(e_j)$.

A heißt darstellende Matrix von f.

(b) Für jedes $A \in K^{m\times n}$ ist die Abbildung $f : K^n \to K^m,\ f(x) = A \cdot x$ linear.

Merke: Die Spalten der darstellenden Matrix sind die Bilder der Einheitsvektoren.

Beweis:

(a) Wir definieren $a_{ij} := f_i(e_j)$ und erhalten $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(e_j) \\ \vdots \\ f_m(e_j) \end{pmatrix} = f(e_j)$. Wegen

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j \text{ folgt } f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j\right) \overset{f\text{ linear}}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_j,$$

daher

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}xj \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix},$$

d.h. $f(x) = A \cdot x$ und $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = (Ax)_i \qquad (\diamond)$.

(b) Bereits bewiesen.

2.9 Folgerung

Sei K ein Körper, seien $f : K^n \to K^m$ und $g : K^r \to K^n$ lineare Abbildungen mit den darstellenden Matrizen $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times r}$. Dann ist $C := A \cdot B \in K^{m\times r}$ die darstellende Matrix für die lineare Abbildung $f \circ g : K^r \to K^m$.

Beweis:
$f \circ g$ ist linear (evtl. Übungsaufgabe)
$(f \circ g)(e_k) = f(g(e_k)) = f(B \cdot e_k) = A \cdot (B \cdot e_k)$
Sei C die darstellende Matrix von $f \circ g$. Dann

$$c_{ik} = (f \circ g)_i(e_k) \overset{(\diamond)}{=} (A \cdot (B \cdot e_k))_i \quad \overset{(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \text{ mit } x = B\cdot e_k}{\overset{\downarrow}{=}} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \underbrace{(B \cdot e_k)_j}_{b_{jk}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} =$$

$$= (A \cdot B)_{ik} \quad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, r)$$

2.10 Rechenregeln für Matrizen

Sei K ein Körper.

(a) $A \in K^{m\times n},\ B \in K^{n\times r},\ C \in K^{r\times s}$
$\Rightarrow A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

(b) $A \in K^{m\times n}$
$\Rightarrow E_m \cdot A = A = A \cdot E_n$

(c) $A \in K^{m\times n},\ B, C \in K^{n\times r}$
$\Rightarrow A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

(d) $A, B \in K^{m\times n},\ C \in K^{n\times r}$
$\Rightarrow (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

(e) $\lambda \in K,\ A \in K^{m\times n},\ B \in K^{n\times r}$
$\Rightarrow \lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$

Beweis:

(a) Betrachte $h : K^s \to K^r,\ g : K^r \to K^n,\ f : K^n \to K^m$ mit den darstellenden Matrizen A, B, C. Wegen

$$(f \circ g) \circ h \overset{\text{Satz 0.27}}{=} f \circ (g \circ h)$$

und Folgerung 2.9 folgt

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

(b) $(E_m \cdot A)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\delta_{ij}}_{\substack{1 \quad \text{für } i=j \\ 0 \quad \text{sonst}}} a_{jk} = a_{ik} = (A)_{ik} \quad (i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n)$

$\Rightarrow E_m \cdot A = A$.
Analog $A \cdot E_n = A$.

(c)-(d) Übung, Tutorium.

(e) Klar.

Bemerkung:
Die quadratischen Matrizen $K^{n\times n}$ bilden wegen (b)-(d) mit der Matrizenaddition und der Matrizenmultiplikation einen Ring mit E_n als Einselement.
Dieser Ring ist für $n \geq 2$ weder kommutativ noch nullteilerfrei.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Nullmatrix}}$$

2.11 Definition (transponierte Matrix)

Sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in K^{m\times n}$.
$A^T := (a_{ji})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in K^{n\times m}$ heißt die zu A transponierte Matrix.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3},\ A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1},\ b^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

2.12 Rechenregeln (für transponierte Matrizen)

Sei K ein Körper. Dann gilt

(a) $A \in K^{m\times n} \Rightarrow (A^T)^T = A$

(b) $A, B \in K^{m\times n} \Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T$

(c) $\lambda \in K,\ A \in K^{m\times n} \Rightarrow (\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$

(d) $A \in K^{m\times n},\ B \in K^{n\times r} \Rightarrow (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Beweis:

(a)-(c) Klar.

(d) $A \cdot B \in K^{m\times r} \Rightarrow (A \cdot B)^T \in K^{r\times m}$

$$((A\cdot B)^T)_{ik} = (A\cdot B)_{ki} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{A_{kj}}_{a_{kj}} \cdot \underbrace{B_{ji}}_{b_{ji}} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(A^T)_{jk}}_{\in K} \cdot \underbrace{(B^T)_{ij}}_{\in K} = \sum_{j=1}^{n} (B^T)_{ij} \cdot (A^T)_{jk} =$$
$$(B^T \cdot A^T)_{ik} \quad (i = 1, \dots, r;\ k = 1, \dots, m)$$

2.13 Definition und Lemma (inverse Matrix)

Sei K ein Körper. $A \in K^{n\times n}$ heißt invertierbar, wenn $A' \in K^{n\times n}$ existiert mit
$A \cdot A' = A' \cdot A = E_n$.
A' ist eindeutig bestimmt und heißt inverse Matrix zu A (Bezeichung: A^{-1}).

Beweis:

1. Wir betrachten $GL(n, K) := \{A \in K^{n\times n} :\ A \text{ invertierbar}\}$.
   Zeige: $GL(n, K)$ ist Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation ("general linear group")

   i. $A, B \in GL(n, K) \Rightarrow A \cdot B \in GL(n, K)$.
      Denn: $A \cdot A' = A' \cdot A = E_n$
      $B \cdot B' = B' \cdot B = E_n$

$$\Rightarrow \underbrace{B' \cdot A'}_{\in K^{n\times n}} \cdot A \cdot B = B' E_n B = B'B = E_n$$

Analog: $A \cdot B \cdot B' \cdot A' = E_n$

ii. Assoziativität des Matrixprodukts: 2.10a

iii. E_n neutrales Element: 2.10b

iv. A' ist inverses Element zu A:
Noch zu beweisen: $A' \in GL(n,K)$
Folgt sofort aus $A' \cdot \underbrace{A}_{\in K^{n\times n}} = A \cdot A' = E_n$

2. Aus der eindeutigen Bestimmtheit des Elements in $GL(n,K)$ ergibt sich $A^{-1} = A'$.

2.14 Rechenregeln (für inverse Matrizen)

Sei K ein Körper.

(a) $A, B \in K^{n\times n}$ invertierbar $\Rightarrow A \cdot B$ invertierbar, $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(b) $A \in K^{n\times n}$ invertierbar $\Rightarrow A^{-1}$ invertierbar, $(A^{-1})^{-1} = A$

(c) $A \in K^{n\times n}$ invertierbar $\Rightarrow A^T$ invertierbar, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Beweis:

(a) $A, B \in GL(n,K),\ GL(n,K)$ Gruppe $\overset{\text{Lemma 1.6a}}{\Rightarrow} (A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

(b) Analog mit Lemma 1.6b.

(c) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n \overset{2.12\text{d}}{\Rightarrow} (A^{-1})^T \cdot A^T = A^T \cdot (A^{-1})^T = E_n^T = E_n$
$\Rightarrow A^T \in GL(n,K),\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

2.15 Elementarmatrizen und elementare Zeilen/Spaltenumformungen

Sei

$$\begin{array}{c} i\text{-te Spalte} \\ \downarrow \end{array}$$

$$S_i(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile} \quad (\lambda \in K \setminus \{0\})$$

$$\begin{array}{c} j\text{-te Spalte} \\ \downarrow \end{array}$$

$$Q_i^j(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \lambda & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile} \quad (\lambda \in K,\ i \neq j)$$

$$P_i^j := \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & & j\text{-te Spalte} & & \\ & & & & \downarrow & & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 0 && 1 && \\ &&& \ddots &&& \\ && 1 && 0 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad (i \neq j)$$

Wirkung auf $A \in K^{m\times n} = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \dots \\ a^{(m)} \end{pmatrix} = (a_1 \dots a_n)$:

Zeilenumformungen:

El. Matrix	Inverse	Matrizenmultiplikation	element. Zeilenumformung	Kürzel
$S_i(\lambda) \in K^{m\times m}$	$S_i(\frac{1}{\lambda})$	$S_i(\lambda) \cdot A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda a^{(i)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$	Multipl. der i-ten Zeile mit λ	EZU I
$Q_i^j(\lambda) \in K^{m\times m}$	$Q_i^j(-\lambda)$	$Q_i^j(\lambda) \cdot A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(i)} + \lambda a^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$	Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile	EZU II
$P_i^j \in K^{m\times m}$	P_i^j	$P_i^j \cdot A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(j)} \\ \vdots \\ a^{(i)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$	Vertauschung der i-ten und der j-ten Zeile	EZU III

Spaltenumformungen:

El. Matrix	Inverse	Matrizenmultiplikation	element. Spaltenumformung	Kürzel
$S_i(\lambda) \in K^{n\times n}$	$S_i(\frac{1}{\lambda})$	$A \cdot S_i(\lambda)$ $= (a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n)$	Multiplikation der i-ten Spalte mit λ	ESU I
$Q_i^j(\lambda) \in K^{n\times n}$	$Q_i^j(-\lambda)$	$A \cdot Q_i^j(\lambda)$ $= (a_1, \dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_n)$	Addition des λ-fachen der i-ten Spalte zur j-ten Spalte	ESU II
$P_i^j \in K^{n\times n}$	P_i^j	$A \cdot P_i^j$ $= (a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$	Vertauschung der i-ten und der j-ten Spalte	ESU III

Wir rechnen exemplarisch ESU II nach: $Q_{ij} = E_n + \lambda \cdot (0, \ldots, \overset{j\text{−te Spalte}}{e_i}, \ldots, 0)$
$A \cdot Q_i^j(\lambda) = A \cdot (E_n + \lambda \cdot (0, \ldots, \overset{j\text{−te Spalte}}{e_i}, \ldots, 0))$
$= (a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n) + \lambda \cdot (0, \ldots, \overset{j\text{−te Spalte}}{a_i}, \ldots, 0) = (a_1, \ldots, \underbrace{a_j + \lambda a_i}_{j\text{−te Spalte}}, \ldots, a_n)$
(Entsprechend bewirkt $Q_j^i(\lambda)$ die Addition des λ-fachen der j-ten Spalte von $A^T \cdot Q_j^i(\lambda)$ zur i-ten Spalte von A. Hieraus folgt durch Transposition, dass $Q_j^i(\lambda)^T = Q_i^j(\lambda)$ von links mit A multipliziert, die Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile bewirkt.)
$Q_i^j(\lambda) \cdot Q_i^j(\mu) = Q_i^j(\lambda + \mu)$, also $Q_i^j(\lambda) \cdot Q_i^j(-\lambda) = E_n = Q_i^j(-\lambda) \cdot Q_i^j(\lambda)$, somit $Q_i^j(\lambda)^{-1} = Q_i^j(-\lambda)$.

2.16 Lemma

Sei K ein Körper, $A \in K^{m \times n},\ a_{11} \neq 0$. Dann gilt:

(a) Es existiert $G \in K^{m \times m}$ invertierbar und $\tilde{A} \in K^{(m-1) \times (n-1)}$, so dass

$$A = G \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

(b) Außerdem existiert $G \in K^{m \times m}$ und $H \in K^{n \times n}$, beide invertierbar, und $\hat{A} \in K^{(m-1) \times (n-1)}$, so dass

$$A = G \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot H.$$

Beweis:

(a) Zeilenumformungen vom Typ II liefern das Resultat:
$G = \left[Q_m^1(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}) \cdot Q_{m-1}^1(-\frac{a_{m-1\,1}}{a_{11}}) \cdot \ldots \cdot Q_2^1(-\frac{a_{21}}{a_{11}})\right]^{-1}$
[Die Anwendung von $Q_i^1(-\frac{a_{i1}}{a_{11}})$ auf A bewirkt die Annullierung von a_{i1}.]
G ist wohl definiert und invertierbar, da jede einzelne Elementarmatrix invertierbar ist.

(b) Wende Spaltenumformungen vom Typ II und Typ I an
$H = [\ Q_1^2(-\frac{a_{12}}{a_{11}}) \cdot Q_1^3(-\frac{a_{13}}{a_{11}}) \cdot \ldots \cdot Q_1^n(-\frac{a_{1n}}{a_{11}}) \cdot \underbrace{S(\frac{1}{a_{11}})}_{\text{Skalierung auf 1}}\ ]^{-1}$

2.17 Satz (Äquivalenznormalform)

Sei K ein Körper, $A \in K^{m \times n}$. Dann gibt es $G \in K^{m \times m}$ und $H \in K^{n \times n}$, beide invertierbar, und $r \in \{0, \ldots, \min(m, n)\}$, so dass

$$A = G \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \cdot H \quad \Big\}m \text{ Zeilen}$$

Bemerkung: Wir lassen explizit die Fälle $r = 0$, $r = m$ und $r = n$ zu, was zum Verschwinden von E_r bzw. der Nullzeilen oder Nullspalten führt.

Beweisskizze:

1.F.: $A = 0$: In diesem Fall gilt $r = 0$ und $A = E_m \cdot 0 \cdot E_n$.

2.F.: $A \neq 0$:

- 2.1: $a_{11} \neq 0$: Wende Lemma 2.16b an.
- 2.2: $a_{11} = 0$: Wegen $A \neq 0$ existiert mindestens ein Matrixelement $a_{ij} \neq 0$. Mit elementaren Zeilen- und Spaltenvertauschungen (vom Typ III) erhält man, dass in $A' := P_i^1 \cdot A \cdot P_j^1 \quad A'_{11} \neq 0$ gilt. Nach Lemma 2.16b $A' = G' \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot H'$,

$$\text{also } A \overset{\substack{(P_i^1)^{-1} = P_i^1 \\ \downarrow}}{=} P_i^1 \cdot G' \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot H' \cdot P_j^1$$

Insgesamt: $A \neq 0 \Rightarrow \exists \hat{G} \in K^{m \times m}$ invertierbar, $\hat{H} \in K^{n \times n}$ invertierbar, $\hat{A} \in K^{(m-1)\times(n-1)}$

$$A = \hat{G} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \hat{H}$$

Das Verfahren lässt sich fortsetzen, wenn $\hat{A} \neq 0$. Es bricht ab, wenn $\hat{A} = 0$. Wiederholte Anwendung liefert die Behauptung.

2.18 Satz

Sei K ein Körper, $f : K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung und $A \in K^{m \times n}$ ihre darstellende Matrix. Dann gilt:

$$f \text{ bijektiv} \quad \Leftrightarrow \quad m = n \;\wedge\; A \text{ invertierbar}$$

Beweis:

"$\Leftarrow$" Sei $A \in K^{n \times n}$ invertierbar. Dann besitzt $f : K^n \to K^n$, $f(x) = A \cdot x$ die Umkehrabbildung $f^{-1} : K^n \to K^n$, $f(x) = A^{-1} \cdot x$, also ist f bijektiv nach Definition und Satz 0.30.
[$f^{-1}(f(x)) = A^{-1} \cdot A \cdot x = x \quad (x \in K^n)$
$f(f^{-1}(x)) = A \cdot A^{-1} \cdot x = x \quad (x \in K^n)$]

"$\Rightarrow$" Sei $f : K^n \to K^m$ bijektiv, $A \in K^{m \times n}$ darstellende Matrix von f. Nach Satz 2.17 gilt

$$A = G \cdot \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

mit $G \in K^{m\times m}$ und $H \in K^{n\times n}$ invertierbar. Somit sind die linearen Abbildungen $g : K^m \to K^m$, $g(x) = G \cdot x$ und $h : K^n \to K^n$, $h(x) = Hx$ jeweils bijektiv und $\tilde{f} : K^n \to K^m$, $\tilde{f} = g^{-1} \circ f \circ h^{-1}$ ebenfalls bijektiv. $\tilde{f}$ besitzt die darstellende Matrix $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wegen $\tilde{f}$ bijektiv kann diese Matrix keine Nullzeile *und* keine Nullspalte beinhalten.

Denn: Ist die j-te Spalte eine Nullspalte, so folgt $\tilde{f}(e_j) = 0 = \tilde{f}(0)$, d.h. $\tilde{f}$ ist *nicht* injektiv.
Ist die i-te Zeile eine Nullzeile, so folgt $\tilde{f}_i(x) = 0$ $(x \in K^n)$, d.h. $e_i \notin \tilde{f}(K^n)$, also $\tilde{f}(K^n) \neq K^m$, somit $\tilde{f}$ *nicht* surjektiv.

Daher folgt $r = m = n$ und $A = G \cdot E_n \cdot H = G \cdot H$. Wegen G, H invertierbar ist auch A invertierbar.

2.19 Satz

Sei K ein Körper, $f : K^n \to K^n$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(a) f ist bijektiv,

(b) f ist injektiv,

(c) f ist surjektiv.

Beweis:
Wir benutzen die Abbildung $\tilde{f} : K^n \to K^n$ aus dem Beweis zu 2.18. Wegen $\tilde{f} = g^{-1} \circ f \circ h^{-1}$ und g, h bijektiv gilt:
f injektiv $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ injektiv,
f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ surjektiv.
Wir zeigen: $\tilde{f}$ injektiv $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ bijektiv

$$\begin{aligned} \tilde{f} \text{ injektiv} \quad &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ enthält } \textit{keine} \text{ Nullspalte (vgl. Beweis zu 2.18)} \\ &\overset{m=n}{\Rightarrow} \quad \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ enthält } \textit{keine} \text{ Nullzeile} \\ &\Rightarrow \quad E_n \text{ ist darstellende Matrix von } \tilde{f} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f} \text{ bijektiv.} \end{aligned}$$

Analog zeigt man: $\tilde{f}$ surjektiv $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ bijektiv.

2.20 Corollar

Sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$. Dann sind äquivalent:

(a) A ist invertierbar.

(b) $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ $\quad (x \in K^n)$, d.h. die homogene Gleichung $Ax = 0$ besitzt *nur* die triviale Lösung [d.h. $x = 0$].

(c) $\forall\, b \in K^n\, \exists\, x \in K^n : Ax = b$, d.h. das lineare Gleichungssytem besitzt für jede rechte Seite *mindestens* eine Lösung.

(d) $\forall\, b \in K^n\, \exists_1\, x \in K^n : Ax = b$, d.h. das lineare Gleichungssytem besitzt für jede rechte Seite *genau* eine Lösung.

Bemerkung: Corollar 2.20 enthält die *Fredholmsche Alternative*: Entweder besitzt die homogene Gleichung $Ax = 0$ eine nichttriviale Lösung oder die Gleichung $Ax = b$ ist für jede rechte Seite eindeutig lösbar.

Beweis:
Betrachte $f : K^n \to K^n,\ f(x) = Ax$

(d)$\Leftrightarrow$(a): (d) $\Leftrightarrow f$ bijektiv $\overset{2.18}{\Leftrightarrow} A$ invertierbar

(d)$\Leftrightarrow$(b): (d) $\Leftrightarrow f$ bijektiv $\overset{2.19}{\Leftrightarrow} f$ injektiv

Zeige: f injektiv $\Leftrightarrow (\forall x \in K^n : \overbrace{f(x) = 0}^{Ax=0} \Rightarrow x = 0)$
”$\Rightarrow$”: f injektiv, dann insbesondere $f(x) = f(0) \Rightarrow x = 0$
”$\Leftarrow$”: $f(x) = f(x') \overset{f \text{ linear}}{\Leftrightarrow} f(x - x') = 0 \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} x - x' = 0 \Leftrightarrow x = x'$

(d)$\Leftrightarrow$(c): (d) $\Leftrightarrow f$ bijektiv $\overset{2.19c}{\Leftrightarrow} f$ surjektiv $\Leftrightarrow$ (c)

2.21 Folgerung

Sei K ein Körper. $A \in K^{n\times n}$ ist bereits dann invertierbar, wenn ein $B \in K^{n\times n}$ existiert, so dass $A \cdot B = E_n$ oder $B \cdot A = E_n$. In diesem Fall gilt $B = A^{-1}$.

Beweis:
$A \cdot B = E_n \Rightarrow \forall\, b \in \mathbb{R}^n : (A \cdot B) \cdot b = b \Rightarrow \forall\, b \in \mathbb{R}^n : A \cdot (B \cdot b) = b \overset{2.20(c)\Rightarrow(a)}{\Rightarrow} A$ invertierbar.
Somit: $A \cdot B = E_n \Rightarrow B = A^{-1}$.
$B \cdot A = E_n$. Sei $Ax = 0$. Dann $x = E_n x = B \cdot \underbrace{Ax}_{0} = B \cdot 0 = 0. \overset{2.20(b)\Rightarrow(a)}{\Rightarrow} A$ invertierbar.
Also: $B \cdot A = E_n \Rightarrow B = A^{-1}$

Wir wollen jetzt zeigen, dass sich invertierbare Matrizen allein durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix transformieren lassen.

1. Phase: Transformation in eine rechte Dreiecksmatrix
2. Phase: Transformation in die Einheitsmatrix

2.22 Definition (Dreiecksmatrix)

Sei K ein Körper.
$R \in K^{n\times n}$ heißt rechte oder obere Dreiecksmatrix, wenn $r_{ij} = 0$ für $1 \leq j < i \leq n$.
$L \in K^{n\times n}$ heißt linke oder untere Dreiecksmatrix, wenn $l_{ij} = 0$ für $1 \leq i < j \leq n$.

2.23 Satz (Transformation auf Dreiecksform)

Sei K ein Körper. Jede invertierbare Matrix $A \in K^{n\times n}$ kann durch elementare Zeilenumformungen von Typ II und III auf obere Dreiecksform gebracht werden. Alle Diagonalelemente der Dreiecksmatrix sind $\neq 0$.

Beweis: Gaußsches Eliminationsverfahren.
Vollständige Induktion nach n:
$n = 1$: $A \in K^{1\times 1}$ invertierbar $\Leftrightarrow a_{11} \neq 0$. Also ist A Dreiecksmatrix mit Diagonale $\neq 0$.

Die Behauptung sei für n bewiesen (Induktionsannahme).
Betrachte $A \in K^{(n+1)\times(n+1)}$.

$$A = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n+1)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{EZU III oder } E_n} \begin{pmatrix} a^{(i)} \\ \vdots \\ a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(n+1)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{EZU III mehrfach} \\ \text{wie in Lemma 1.16a}}} \begin{pmatrix} \overbrace{a_{i1}}^{\alpha:=} & \overbrace{a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}}^{\tilde{a}^T:=} \\ 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Eine EZU III ist nur erforderlich, wenn $a_{11} = 0$. Sie ist möglich, weil die 1. Spalte *keine* Nullspalte ist (Andernfalls wäre $Ae_1 = 0$, d.h. A nicht injektiv)
Nach Induktionsvoraussetzung kann $\tilde{A}$ durch elementare Zeilenumformungen vom Typ II und III auf obere Dreiecksform mit nicht verschwindenden Diagonalelementen gebracht werden, *falls* $\tilde{A}$ invertierbar ist.
Zeige: $\tilde{A}\tilde{x} = 0 \Rightarrow \tilde{x} = 0$. (Dann $\tilde{A}$ invertierbar nach Corollar 2.20.)
Wähle x_1 so, dass $\alpha \cdot x_1 + \tilde{a}^T\tilde{x} = 0$ [möglich, weil $\alpha \neq 0$]
Dann gilt: $\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \tilde{a}^T \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{invertierbar, da durch} \\ \text{Anwendung von EZUs} \\ \text{auf invertierbares } A \\ \text{entstanden}}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also $\begin{pmatrix} x_1 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. D.h. $\tilde{x} = 0$.

2.24 Lemma

Sei K ein Körper, $R \in K^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, bei der alle Diagonalelemente $\neq 0$ sind. Dann kann R durch elementare Zeilenumformungen vom Typ I und II in die Einheitsmatrix transformiert werden.

Beweis:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{mehrfache} \\ \text{EZU II}}} \begin{pmatrix} r_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & r_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{EZU I}} \begin{pmatrix} r_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{usw.}$$

2.25 Berechnung von A^{-1}

Falls $A \in K^{n\times n}$ durch elementare Zeilenumformungen in E_n transformiert wird, dann wird E_n durch dieselben Zeilenumformungen in A^{-1} transformiert:

$$A \xrightarrow{\text{EZU}} E_n \quad \Longrightarrow \quad E_n \xrightarrow{\text{EZU}} A^{-1}$$

Beweis: $\underbrace{C}_{\substack{\text{Prod.von} \\ \text{El.matr.}}} \cdot A = E_n \overset{2.21}{\Rightarrow} C = A^{-1} \Leftrightarrow C \cdot E_n = A^{-1}$

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

2.26 Berechnung der Lösung von $Ax = b$ ($A \in K^{n\times n}$ invertierbar)

Schema: 1. Schritt: $A \xrightarrow{\text{EZUs}} R$

$b \xrightarrow{\text{EZUs}} b'$

2. Schritt: löse $Rx = b'$ durch Rückwärtseinsetzen, d.h. zuerst n-te Gleichung lösen, mit dem Ergebnis die $(n-1)$-te Gleichung usw.

Bemerkung:
Das Rückwärtseinsetzen ist äquivalent zur Anwendung der EZUs aus dem Beweis von Lemma 2.24 auf b' in geänderter Reihenfolge: Zuerst wird jeweils das Diagonalelement auf 1 skaliert und dann die darüberliegende Spalte annulliert.

$$R \xrightarrow{\text{EZUs I,II}} E_n$$
$$b' \xrightarrow{\text{EZUs I,II}} x$$

Denn:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} r_{11} & \dots & \dots & r_{1n} & b_1' \\ & r_{22} & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & r_{n-1\,n} & b_{n-1}' \\ & & & r_{nn} & b_n' \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} r_{11} & \dots & \dots & r_{1n} & b_1' \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & r_{n-1\,n-1} & r_{n-1\,n} & b_{n-1}' \\ & & & 1 & \frac{b_n'}{r_{nn}} \end{array}\right) \leftarrow x_n$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} r_{11} & \dots & \dots & 0 & b_1' - r_{1n}x_n \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & r_{n-1\,n-1} & 0 & b_{n-1}' - r_{n-1\,n}x_n \\ & & & 1 & x_n \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} r_{11} & \dots & \dots & 0 & \\ & \ddots & & \vdots & \\ & & 1 & 0 & \frac{1}{r_{n-1\,n-1}}(b_{n-1}' - r_{n-1\,n}x_n) \\ & & & 1 & x_n \end{array}\right) \leftarrow x_{n-1} \quad \text{usw.}$$

§3 Untervektorräume, lineare Abhängigkeit, Basen

Untervektorräume

3.1 Definition (Untervektorraum)

Sei V ein K-Vektorraum. Eine nicht leere Menge $U \subset V$ heißt Untervektorraum von V, wenn gilt

(a) $\forall\, u, v \in U: \qquad u + v \in U$

(b) $\forall\, \lambda \in K,\ u \in U: \qquad \lambda \cdot u \in U$

Bemerkung:
Jeder Untervektorraum ist ein Vektorraum, insbesondere gilt $0 \in U$.

[Denn: 2.1a: $(U, +)$ ist Untergruppe von V, weil $U \neq \emptyset$,

$$u, v \in U \overset{\text{(a)}}{\Longrightarrow} u + v \in U$$

$$u \in U \overset{\text{(b)}}{\Longrightarrow} \underbrace{(-1)\cdot u}_{-u} \in U \Rightarrow -u \in U$$

2.1b-e: folgt sofort aus $U \subset V$]

Beispiele:

1. $U = \{0\}$ ist Untervektorraum jedes Vektorraums.
2. Sei $w \in V$ fest gewählt. Dann ist $U := \{\alpha \cdot w : \ \alpha \in K\}$ ein Untervektorraum von V.
   [$u, v \in U \Rightarrow u = \alpha \cdot w,\ v = \beta \cdot w \Rightarrow u + v = (\alpha + \beta)\cdot w \in U$
   $\lambda \in K,\ u \in U \Rightarrow \lambda \cdot u = \lambda \cdot (\alpha \cdot w) \overset{2.1\text{d}}{=} (\lambda \cdot \alpha)\cdot w \in U$]
   Geometrische Deutung: $V = \mathbb{R}^2$, z.B. $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
   $U := \{\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ Untervektorraum von V. U ist die Gerade durch den Ursprung, die den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält.
3. Verallgemeinerung: $w_1, \cdots, w_r \in V$
   $U := \{\alpha_1 \cdot w_1 + \ldots + \alpha_r \cdot w_r : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K\}$ Untervektorraum von V
   Geometrische Deutung: $V = \mathbb{R}^3,\ r = 2,\ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$U := \{\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \text{ Untervektorraum von } \mathbb{R}^3$$

$$= \{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} : \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \qquad (xy\text{-Ebene})$$

   Komplizierter: $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$U := \underbrace{\{\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}}_{\text{Von den Vektoren } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ aufgespannte Ebene}} \qquad \text{Untervektorraum von } \mathbb{R}^3$$

4. $V = \mathbb{R}^2, \ U := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 - 2x_2 = 0\}$ ist Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.
   Das folgt aus dem nächsten Lemma durch Betrachtung von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
   $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 - 2x_2$, und $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ f(x) = 0\}$.
   (Wegen $x_1 - 2x_2 = 0$, d.h. $x_2 = \frac{x_1}{2}$ handelt es sich um dieselbe Gerade wie in 2.)

3.2 Definition und Lemma

Seien V, W K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

(a) $\operatorname{Kern} f := \{v \in V : \ f(v) = 0\}$ ist Untervektorraum von V
(Sprechweise: Kern von f)

(b) $\operatorname{Bild} f := f(V)$ ist ein Untervektorraum von W
(Sprechweise: Bild von f)

Beweis:

(a) $\operatorname{Kern} f \neq \emptyset$ wegen $f(0) = 0$ und $0 \in V$
$u_1, u_2 \in \operatorname{Kern} f \Rightarrow f(u_1) = 0 \wedge f(u_2) = 0 \Rightarrow$
$f(u_1 + u_2) \overset{\overset{f \text{ linear}}{\downarrow}}{=} f(u_1) + f(u_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow u_1 + u_2 \in \operatorname{Kern} f$
$\lambda \in K, \ u \in \operatorname{Kern} f \Rightarrow f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot \underbrace{f(u)}_{0} = 0 \Rightarrow \lambda \cdot u \in \operatorname{Kern} f$

(b) $w_1, w_2 \in \operatorname{Bild} f \Rightarrow w_1 = f(v_1), \ w_2 = f(v_2)$ ($v_1, v_2 \in V$ geeignet)

$$\Rightarrow w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) \overset{\overset{f \text{ linear}}{\downarrow}}{=} f(\underbrace{v_1 + v_2}_{\in V}) \in \operatorname{Bild} f$$

$$\lambda \in K, \ w \in \operatorname{Bild} f \Rightarrow w = f(v) \ (v \text{ geeignet}) \Rightarrow \lambda \cdot w = \lambda \cdot f(v) \overset{\overset{f \text{ linear}}{\downarrow}}{=} f(\underbrace{\lambda \cdot v}_{\in V}) \in \operatorname{Bild} f$$

Bemerkung: Sei $A \in K^{m \times n}$. Die Lösungsmenge der homogenen Gleichung $Ax = 0$
$\{x \in K^n : \ Ax = 0\}$ bildet einen Untervektorraum von K^n.

3.3 Lemma

Sei V ein K-Vektorraum.

(a) Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine nicht leere Familie von Untervektorräumen von V.
Dann ist $\bigcap\limits_{i\in I} U_i$ ein Untervektorraum von V.

(b) Seien $U_1,\ldots,U_r$ Untervektorräume von V.
Dann ist $U_1+U_2+\ldots+U_r := \{u_1+u_2+\cdots+u_r : \ u_1\in U_1,\ldots,u_r\in U_r\}$ ein Untervektorraum von V.

Bemerkung:
Es sind zwar $U_1\cap U_2,\ U_1+U_2$ Untervektorräume von V, im allgemeinen aber *nicht* $U_1\cup U_2$.
$[U_1 := \{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} : \ \alpha\in\mathbb{R}\}$ und $U_2 := \{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} : \ \alpha\in\mathbb{R}\}$ sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$,
$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \in U_1\cup U_2$, aber $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\notin U_1\cup U_2]$.

Beweis:

(a) $u,v\in\bigcap\limits_{i\in I}U_i \Rightarrow u,v\in U_i\ (i\in I) \overset{U_i \text{ UVR}}{\Longrightarrow} u+v\in U_i\ (i\in I)\Rightarrow u+v\in\bigcap\limits_{i\in I}U_i$
$\lambda\in K,\ u\in\bigcap\limits_{i\in I}U_i \Rightarrow \lambda\in K,\ u\in U_i\ (i\in I) \overset{U_i \text{ UVR}}{\Longrightarrow} \lambda\cdot u\in U_i\ (i\in I)\Rightarrow \lambda\cdot u\in\bigcap\limits_{i\in I}U_i$

(b) $u,v\in U_1+\ldots+U_r \Rightarrow u=u_1+\ldots+u_r,\ v=v_1+\ldots+v_r$ mit $u_i,v_i\in U_i\ (i=1,\ldots,r)$
$\Rightarrow u+v=(u_1+v_1)+\ldots+(u_r+v_r)\in U_1+\ldots+U_r$
$\lambda\in K,\ u\in U_1+\ldots+U_r\Rightarrow \lambda\cdot u\in U_1+\ldots+U_r$ analog

Basis, Erzeugendensystem, lineare Unabhängigkeit

Sei V ein K-Untervektorraum, $b_1,\ldots,b_r\in V$ (fest).
Fragestellungen:

1. Gibt es für jedes $v\in V$ *genau ein* r-Tupel $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in K^r$, so dass $v=\lambda_1\cdot b_1+\ldots+\lambda_r\cdot b_r$? $\rightsquigarrow b_1\ldots,b_r$ Basis
2. Gibt es für jedes $v\in V$ *mindestens ein* r-Tupel $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in K^r$, so dass $v=\lambda_1\cdot b_1+\ldots+\lambda_r\cdot b_r$? $\rightsquigarrow b_1\ldots,b_r$ Erzeugendensystem
3. Gibt es für jedes $v\in V$ *höchstens ein* r-Tupel $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in K^r$, so dass $v=\lambda_1\cdot b_1+\ldots+\lambda_r\cdot b_r$? $\rightsquigarrow b_1\ldots,b_r$ linear unabhängig

Beispiele: $V=\mathbb{R}^3$

1. $b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ b_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
$\lambda_1=x_1,\ \lambda_2=x_2,\ \lambda_3=x_3$ eindeutig bestimmt $\rightsquigarrow b_1,b_2,b_3$ Basis von $\mathbb{R}^3$

2. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $\mu \in \mathbb{R}$ setze $\lambda_1 := x_1 + \mu, \ \lambda_2 := x_2 + \mu, \ \lambda_3 := x_3 + \mu, \ \lambda_4 := -\mu$
$\rightsquigarrow b_1, \ldots, b_4$ Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$

3. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = x_1, \ \lambda_2 = x_2, \ x_3 = 0$

λ_1, λ_2 sind eindeutig bestimmt [allerdings ist nicht jedes $x \in \mathbb{R}^3$ durch $(*)$ darstellbar]
$\rightsquigarrow b_1, b_2$ linear unabhängig

3.4 Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem, endlich erzeugter Vektorraum)

Sei V ein K-Vektorraum, $r \in \mathbb{N}, \ b_1, \ldots, b_r \in V$.

(a) $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r) := \{\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i : \ \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K\}$
“Menge der Linearkombinationen der $b_1, \ldots, b_r$“

(b) $b_1, \ldots, b_r$ Erzeugendensystem von $V \quad :\Leftrightarrow \quad \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r) = V$

(c) V heißt endlich erzeugt, wenn es ein Erzeugendensystem von V gibt.

Bemerkung: Offensichtlich gilt:

$(b_1, \ldots, b_r)$ Erzeugendensystem von $V \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, v \in V \ \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K : \ v = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i$

(D.h. für jedes $v \in V$ gibt es mindestens ein $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r$ mit $v = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i$)

3.5 Lemma

Sei V ein K-Vektorraum, $b_1, \ldots, b_r \in V$. Dann ist $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$ der kleinste Untervektorraum von V, der $b_1, \ldots, b_r$ enthält, d.h. für jeden Untervektorraum U von V mit $b_1, \ldots, b_r \in U$ gilt $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r) \subset U$.

Beweis:

$b_1, \ldots, b_r \in U \overset{U \text{ UVR:3.1(a),(b)}}{\Longrightarrow} \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r \in U \ \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K) \ \Rightarrow \ \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r) \subset U.$

3.6 Definition (lineare Unabhängigkeit)

Sei V ein K-Vektorraum, $r \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_r \in V$, $v \in V$.

(a) $b_1, \ldots, b_r$ linear unabhängig $:\Leftrightarrow \quad \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K : \left(\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0 \right)$

(b) $b_1, \ldots, b_r$ linear abhängig $:\Leftrightarrow \quad b_1, \ldots, b_r$ *nicht* linear unabhängig

(c) v linear abhängig von $b_1, \ldots, b_r \quad :\Leftrightarrow \quad v \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$

Bemerkung:

$b_1, \ldots, b_r$ linear unabhängig $\Leftrightarrow \quad \forall \lambda, \mu \in K^r : \left(\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i \cdot b_i \Rightarrow \lambda_i = \mu_i \ (i = 1, \ldots, r) \right)$.

(D.h. für jedes $v \in V$ gibt es höchstens ein $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r$ mit $v = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i$).

Denn:

$'' \Leftarrow'' \quad \mu_1 = \ldots = \mu_r = 0.$

$$'' \Rightarrow'' \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \cdot b_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - \mu_i) \cdot b_i = 0 \overset{\text{Def}}{\Rightarrow} \lambda_i - \mu_i = 0 \ (i = 1, \ldots, r)$$
$$\Leftrightarrow \lambda_i = \mu_i \ (i = 1, \ldots, r).$$

3.7 Lemma

Sei V ein K-Vektorraum.

(a) Sei $b \in V$. Dann gilt: $\quad b$ linear abhängig $\Leftrightarrow b = 0$.

(b) Sei $r \geq 2$ und $b_1, \ldots, b_r \in V$. Dann gilt:
$b_1, \ldots, b_r$ linear abhängig $\quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \{1, \ldots, r\} : \ b_k \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_r)$.

(c) Sei $r \geq 1$ und $b_1, \ldots, b_{r+1} \in V$. Dann gilt:
b_{r+1} linear abhängig von $b_1, \ldots, b_r \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{r+1}) = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$.

Beweis:

Vorbem.: $b_1, \ldots, b_r$ linear abhängig $\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \cdots, \lambda_r \in K, k \in \{1, \ldots, r\} : \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i b_i = 0 \wedge \lambda_k \neq 0$

(a) $'' \Leftarrow''$: b linear abhängig $\overset{\text{Vorbem}}{\Longleftrightarrow} \exists\, \lambda \in K, \lambda \neq 0 : \ \lambda \cdot b = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{1}{\lambda} \cdot \underbrace{(\lambda \cdot b)}_{=0} = 0$

$'' \Rightarrow''$: $b = 0 \Longrightarrow 1 \cdot b = 0 \ \wedge \ 1 \neq 0 \overset{\text{Vorbem}}{\Longrightarrow} b$ linear abhängig

(b) $'' \Leftarrow''$: $b_1, \ldots, b_r$ linear abhängig $\overset{\text{Vorbem}}{\Longrightarrow} \underbrace{\lambda_k}_{\neq 0} \cdot b_k + \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r} \lambda_i \cdot b_i = 0$

$$\Rightarrow b_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{r} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right) \cdot b_i \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_r)$$

$'' \Rightarrow''$: $b_k \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots, b_r)$

$$\Longrightarrow b_k = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{r} \lambda_i \cdot b_i \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_r \in K \text{ geeignet})$$

$$\overset{\lambda_k:=-1}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i b_i = 0 \Longrightarrow b_1, \ldots, b_r \text{ linear abhängig.}$$

(c) b_{r+1} linear abhängig von $b_1, \ldots, b_r \iff b_{r+1} \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$
$\iff \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{r+1}) = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$
$'' \Leftarrow''$: $b_{r+1} \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{r+1}) = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$.
$'' \Rightarrow''$: $b_{r+1} = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i \cdot b_i$ ($\mu_1, \ldots, \mu_r \in K$ geeignet)
Zeige: $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{r+1}) = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r)$
$'' \supset''$ klar
$'' \subset''$ $v \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{r+1}) \Rightarrow v = \sum\limits_{i=1}^{r+1} \lambda_i \cdot b_i = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i + \lambda_{r+1} \cdot b_r =$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i + \lambda_{r+1} \cdot \sum_{i=1}^{r} \mu_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{(\lambda_i + \lambda_{r+1}\mu_i)}_{\in K} \cdot b_i \in \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_{r+1})$$

3.8 Definition (Basis)

Sei V ein K-Vektorraum, $b_1, \ldots, b_r \in V$.
$b_1, \ldots, b_r$ heißt Basis von V, wenn $b_1, \ldots, b_r$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist.
Für den Vektorraum $\{0\}$ wird die leere Aufzählung (oder leere Menge) $\emptyset$ als Basis festgelegt.

Bemerkung:
$b_1, \ldots, b_r$ Basis von $V \Leftrightarrow \forall v \in V\ \exists_1\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r :\ v = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i$
(D.h. für jedes $v \in V$ gibt es genau ein $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r$ mit $v = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot b_i$.)
Das folgt sofort aus den Bemerkungen zu Definition 3.4 und 3.6.

3.9 Basisauswahlsatz

Sei $V \neq \{0\}$ ein endlich erzeugter Vektorraum und $b_1, \ldots, b_r$ ein Erzeugendensystem von V. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq r$, so dass (nach geeigneter Umnummerierung) $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V bildet.

[Knapp ausgedrückt: Durch Weglassen passender Vektoren (evtl. keiner) aus einem Erzeugendensystem erhält man eine Basis.]

Beweis: Sei $b_1, \ldots, b_r$ ein Erzeugendensystem von $V \neq \{0\}$.
O.E.d.A.: $b_1, \ldots, b_r \neq 0$ (Durch Weglassen der Nullvektoren ändert sich nichts am Wert einer Linearkombination für Nichtnullvektoren. Es können auch nicht alle $b_i = 0$ sein, weil sonst $V = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_r) = \{0\}$ folgen würde.)

1. Fall: $b_1, \ldots, b_r$ linear unabhängig. Dann ist $b_1, \ldots, b_r$ Basis von V.

2. Fall: $b_1, \dots, b_r$ linear abhängig.

Wegen $b_1 \neq 0, \dots, b_r \neq 0$ ist $r \geq 2$. (Andernfalls wäre b_1 linear abhängig, also nach Lemma 3.7a $b_1 = 0$.)
Nach Lemma 3.7b gibt es ein k, so dass b_k linear abhängig von $b_1, \dots, b_{k-1}, b_{k+1}, \dots, b_r$ ist. Wir benennen b_k in b_r und b_r in b_k um. Mit der neuen Bezeichnung ist b_r linear abhängig von $b_1, \dots, b_{r-1}$. Nach Lemma 3.7c folgt $\operatorname{span}(b_1, \dots, b_{r-1}) = \operatorname{span}(b_1, \dots, b_r)$, also ist $b_1, \dots, b_{r-1}$ ein Erzeugendensystem von V.
Wir wiederholen diesen Schluss so lange, bis wir zu einem Erzeugendensystem $b_1, \dots, b_n$ gelangt sind, das linear unabhängig ist. Das ist wegen $b_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, r)$ und Lemma 3.7a spätestens der Fall, wenn $n = 1$. $b_1, \dots, b_n$ ist dann die gesuchte Basis.

3.10 Austauschlemma

Sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis $b_1, \dots, b_n$. Sei $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.
Für jedes k mit $\lambda_k \neq 0$ ist $b_1, \dots, b_{k-1}, v, b_{k+1}, \dots, b_n$ eine Basis von V.

Beweis: O.E.d.A. $k = n$
Wegen $\lambda_n \neq 0$ folgt $b_n = \frac{1}{\lambda_n} \cdot \left(v - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cdot b_i \right) = \frac{1}{\lambda_n} \cdot v + \sum\limits_{i=1}^{n-1} (-\frac{\lambda_i}{\lambda_n}) \cdot b_i \qquad (*)$

1. Zeige: $b_1, \dots, b_{n-1}, v$ Erzeugendensystem von V.
   Aus $(*)$ folgt $b_n \in \operatorname{span}(b_1, \dots, b_{n-1}, v)$. Somit gilt $b_1, \dots, b_n \in \operatorname{span}(b_1, \dots, b_{n-1}, v)$, also nach Lemma 3.5 $\underbrace{\operatorname{span}(b_1, \dots, b_n)}_{V} \subset \operatorname{span}(b_1, \dots, b_{n-1}, v)$.
   Daher: $V = \operatorname{span}(b_1, \dots, b_{n-1}, v)$.

2. Zeige: $b_1, \dots, b_{n-1}, v$ linear unabhängig.
   $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \mu_i \cdot b_i + \mu_n \cdot v = 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n-1} \mu_i \cdot b_i + \mu_n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i = 0$
   $\Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n-1} (\mu_i + \mu_n \lambda_i) \cdot b_i + \mu_n \lambda_n \cdot b_n = 0 \overset{b_i \text{ l.u.}}{\Longrightarrow} \mu_i + \mu_n \lambda_i = 0 \ (i = 0, \dots, n-1), \ \mu_n \lambda_n = 0$
   $\overset{\lambda_n \neq 0}{\Longrightarrow} \mu_n = 0, \ \mu_i = 0 \ (i = 0, \dots, n-1)$.

3.11 Basisergänzungssatz

Sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis $b_1, \dots, b_n$. Außerdem seien $a_1, \dots, a_r \in V$ linear unabhängig mit $r \leq n$.
Dann gibt es $a_{r+1}, \dots, a_n \in \{b_1, \dots, b_n\}$, so dass $a_1, \dots, a_n$ Basis von V ist.

[Knapp ausgedrückt: linear unabhängige Vektoren $a_1, \dots, a_r$ lassen sich durch passende Vektoren aus einer vorhandenen Basis zu einer Basis ergänzen.]

Bemerkung: Im Fall $r = n$ besagt der Satz, dass $a_1, \dots, a_n$ Basis ist. Es ist üblich, diesen Fall einzuschließen, obwohl zu $a_1, \dots, a_n$ keine weiteren Basisvektoren hinzukommen.

Beweis:

Idee: Jedes $a_1, \dots, a_r$ ist Linearkombination von $b_1, \dots, b_n$. Man tauscht nacheinander $a_1, \dots, a_r$ gegen passende b_i aus.
Problem: Dadurch ändert sich die Basis und man muss sicherstellen, dass ein neu hinzukommendes a_i nur gegen ein b_j, aber nicht gegen ein bereits vorhandenes a_j ausgetauscht wird.

Wir betrachten die folgende Aussage für $1 \leq r \leq n$:

$\mathcal{A}(r) :\Leftrightarrow$ Zu $a_1, \dots, a_r \in V$ linear unabhängig gibt es (nach geeigneter Umnummerierung) $b_{r+1}, \dots, b_n$, so dass $a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_n$ Basis von V ist.

Induktionsbeweis:

$\mathcal{A}(1)$: Wegen $b_1, \dots, b_n$ Basis gilt $a_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i {\cdot} b_i$. Mindestens ein λ_k ist $\neq 0$, sonst wäre $a_1 = 0$, also a_1 linear abhängig. Nach der Umnummerierung $b_1 \leftrightarrow b_k$ gilt $\lambda_1 \neq 0$. Aus dem Austauschlemma 3.10 folgt, dass $a_1, b_2, \dots, b_n$ Basis von V ist.

$\mathcal{A}(r) \;\Rightarrow\; \mathcal{A}(r+1) \quad (1 \leq r < n)$:
Seien $a_1, \dots, a_{r+1}$ linear unabhängig. Dann sind auch $a_1, \dots, a_r$ linear unabhängig, also nach Induktionsannahme $a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_n$ Basis (nach geeigneter Umnummerierung der b_i).
Daher: $a_{r+1} = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i {\cdot} b_i + \sum\limits_{i=r+1}^{n} \lambda_i {\cdot} b_i \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ geeignet)
$\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$ kann nicht eintreten, sonst wäre a_{r+1} linear abhängig von $a_1, \dots, a_r$.
Nach dem Austauschlemma kann ein b_k $(r+1 \leq k \leq n)$ gegen a_{r+1} ausgetauscht werden. Durch Umnummerierung $b_{r+1} \leftrightarrow b_k$ folgt die Behauptung.

3.12 Folgerung

Sei V ein K-Vektorraum, $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V und $a_1, \dots, a_r \in V$ linear unabhängig. Dann gilt $r \leq n$.

Beweis:
Sei $r > n$. Da $a_1, \dots, a_r$ linear unabhängig sind und $r > n$ vorliegt, sind auch $a_1, \dots, a_n$ und $a_1, \dots, a_{n+1}$ linear unabhängig. Nach dem Basisergänzungssatz ist $a_1, \dots, a_n$ eine Basis, also gilt $a_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a_i$. Damit folgt a_{n+1} linear abhängig von $a_1, \dots, a_n$ im Widerspruch zu $a_1, \dots, a_{n+1}$ linear unabhängig.

3.13 Satz und Definition (Dimension eines Vektorraums)

Jeder endlich erzeugte K-Vektorraum V besitzt eine Basis. Alle Basen von V enthalten die gleiche Anzahl von Vektoren, diese Zahl $\in \mathbb{N}_0$ wird als Dimension von V bezeichnet. (Schreibweise: $\dim V$).
Endlich erzeugte Vektorräume werden endlich dimensional genannt.
Ist V *nicht* endlich erzeugt, so setzt man $\dim V := \infty$.

Bemerkung: $\dim \{0\} = 0$, $\dim K^n = n$ (weil $e_1, \dots, e_n$ Basis von K^n)

Beweis:

1. Fall: $V = \{0\}$. Eine Basis von V ist die leere Aufzählung (oder Menge). Wegen $0 \in V$ linear abhängig, kann eine Basis von V keine Vektoren enthalten.

2. Fall: $V \neq \{0\}$. Da V endlich erzeugt ist, existiert nach dem Basisauswahlsatz 3.9 eine Basis von V.
   Seien $b_1, \ldots, b_n$ und $b'_1, \ldots, b'_m$ zwei Basen von V. Nach 3.12 folgt $n \leq m$ und $m \leq n$, also $m = n$.

3.14 Folgerung

Sei V ein K-Vektorraum mit $n = \dim V \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_n \in V$. Dann sind äquivalent:

(a) $b_1, \ldots, b_n$ Basis,

(b) $b_1, \ldots, b_n$ linear unabhängig,

(c) $b_1, \ldots, b_n$ Erzeugendensystem.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b),(c) Klar.
(b) $\Rightarrow$ (a) Basisergänzungssatz mit $r = n$.
(c) $\Rightarrow$ (a) Basisauswahlsatz und Satz 3.13.

3.15 Lemma

Seien V, W K-Vektorräume, $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

$$f \text{ injektiv} \Longleftrightarrow \operatorname{Kern} f = \{0\} \ .$$

Beweis:
$'' \Rightarrow''$ $v \in \operatorname{Kern} f \Leftrightarrow f(v) = 0 \overset{f \text{ linear}}{\Longleftrightarrow} f(v) = f(0) \overset{f \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} v = 0$
$'' \Leftarrow''$ $f(v) = f(w) \overset{f \text{ linear}}{\Longleftrightarrow} f(v - w) = 0 \Leftrightarrow v - w \in \operatorname{Kern} f \overset{\operatorname{Kern} f = \{0\}}{\Longrightarrow} v - w = 0 \Leftrightarrow v = w$

3.16 Lemma

Seien V, W K-Vektorräume, $f : V \to W$ linear, $b_1, \ldots, b_n$ Basis von V. Dann gilt:

(a) f injektiv $\Leftrightarrow$ $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ linear unabhängig (in W) ,

(b) f surjektiv $\Leftrightarrow$ $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ Erzeugendensystem von W ,

(c) f bijektiv $\Leftrightarrow$ $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ Basis von W .

Beweis: (a),(b) Übung, Tutorium
(c) folgt sofort aus (a),(b)

3.17 Folgerung (lineare Fortsetzung)

Seien V, W K-Vektorräume, $b_1, \ldots, b_n$ Basis von V, $c_1, \ldots, c_n \in W$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(b_i) = c_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Beweis: Für $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot_i$ setze $f(v) := \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot c_i$.

- $f : V \to W$ ist wegen der eindeutigen Bestimmtheit der λ_i wohl definiert.
- $f(v+w) = f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \cdot b_i\right) = f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) \cdot b_i\right) \overset{\text{Def.}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) \cdot c_i$
  $= \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot c_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \cdot c_i = f(v) + f(w) \quad (v, w \in V)$
  $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$ analog
- Sei $g : V \to W$ lineare Abbildung mit $g(b_i) = c_i$. Dann erfüllt die lineare Abbildung $h := f - g \quad h(b_i) = 0 \ (i = 1, \ldots, n)$, woraus $h(v) = h\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot h(b_i) = 0$ folgt, d.h. $f(v) = g(v) \ (v \in V)$.

3.18 Satz

Jeder K-Vektorraum V mit $n := \dim V \in \mathbb{N}$ ist isomorph zu K^n.

Beweis:
Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V.
Betrachte $f : K^n \to V$ linear mit $f(e_i) = b_i$. (Nach Lemma 3.17 gibt es genau eine derartige Abbildung).
Da $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von K^n und $b_1, \ldots, b_n$ Basis von V ist, ist f nach Lemma 3.16c bijektiv, also ein Vektorraumisomorphismus zwischen K^n und V.

3.19 Corollar

Seien V, W K-Vektorräume mit $\dim V = \dim W < \infty$ und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(a) f ist injektiv,

(b) f ist surjektiv,

(c) f ist bijektiv.

Beweis:
Der Fall $\dim V = \dim W = 0$ ist unmittelbar klar.
Sei $n := \dim V = \dim W \in \mathbb{N}$. Die Aussage folgt dann sofort aus den Sätzen 2.19 und 3.18.

3.20 Dimensionsformel für Untervektorräume

Seien U_1, U_2 Untervektorräume des endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Dann gilt:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) .$$

Beweis:
Wegen V endlich dimensional, sind auch U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ endlich dimensional.

Sei $b_1,\ldots,b_r$ Basis von $U_1\cap U_2$ ($r=0$: leere Basis).

$$\left.\begin{array}{ll} b_1,\ldots,b_r,b'_{r+1},\ldots,b'_s & \text{Basis von } U_1\\ b_1,\ldots,b_r,b''_{r+1},\ldots,b''_s & \text{Basis von } U_2\end{array}\right\}\text{ nach Basisergänzungssatz}$$

Behauptung: $b_1,\ldots,b_r,b'_{r+1},\ldots,b'_s,b''_{r+1},\ldots,b''_t$ Basis von U_1+U_2:

- $b_1,\ldots,b_r,b'_{r+1},\ldots,b'_s,b''_{r+1},\ldots,b''_t$ Erzeugendensystem von U_1+U_2 klar
- lineare Unabhängigkeit:

  $$\underbrace{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\cdot b_i}_{u_0\in U_1\cap U_2}+\underbrace{\sum_{i=r+1}^{s}\lambda'_i\cdot b'_i}_{u_1\in U_1}+\underbrace{\sum_{i=r+1}^{t}\lambda''_i\cdot b''_i}_{u_2\in U_2}=0$$

  $u_0+u_1\in U_1$, außerdem $u_0+u_1=-u_2\in U_2\Rightarrow$

  $$\left.\begin{array}{lll} u_0+u_1\in U_1\cap U_2 \overset{b_1,\ldots,b_r\text{ Basis von }U_1\cap U_2}{\Longrightarrow} & & u_0+u_1=\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i\cdot b_i\\ \text{Andererseits:} & & u_0+u_1=\sum\limits_{i=1}^{r}\lambda_i\cdot b_i+\sum\limits_{i=r+1}^{s}\lambda'_i\cdot b'_i\end{array}\right\}\Rightarrow$$

  $$\overset{b_1,\ldots,b_r,b'_{r+1},\ldots,b_s\text{ Basis von }U_1}{\Longrightarrow}\quad \lambda_i=\mu_i\quad(i=1,\ldots,r),\ \lambda'_i=0\quad(i=r+1,\ldots,s)$$

  Analog durch Betrachtung von u_0+u_2 : $\lambda''_i=0\quad(i=r+1,\ldots,t)$.

  Also $\sum\limits_{i=1}^{r}\lambda_i\cdot b_i=0\overset{b_1,\ldots,b_r\text{ Basis von }U_1\cap U_2}{\Longrightarrow}\lambda_1=\ldots=\lambda_r=0$.

  Somit: $\dim U_1=s,\ \dim U_2=t,\ \dim(U_1\cap U_2)=r,$

  $\dim(U_1+U_2)=s+t-r.$

3.21 Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Seien V,W K-Vektorräume, $\dim V<\infty$, $f:V\to W$ linear. Dann gilt:

$$\dim\operatorname{Kern} f+\dim\operatorname{Bild} f=\dim V$$

Beweis: $n:=\dim V$. O.E.d.A.: $n\in\mathbb{N}$.
Sei $b_1,\ldots,b_r$ Basis von $\operatorname{Kern} f$. Ergänze diese zu einer Basis $b_1,\ldots,b_n$ von V.

1. Zeige: $f(b_{r+1}),\ldots,f(b_n)$ ist Basis von $\operatorname{Bild} f$
   - Erzeugendensystem: $f(b_1),\ldots,f(b_n)$ Erzeugendensystem von $\operatorname{Bild} f \overset{f(b_i)=0\ (i=1,\ldots,r)}{\Longrightarrow}$

     $f(b_{r+1},\ldots,f(b_n)$ Erzeugendensystem von $\operatorname{Bild} f$
   - lineare Unabhängigkeit: $\sum\limits_{i=r+1}^{n}\lambda_i\cdot f(b_i)=0\overset{f\text{ linear}}{\Longleftrightarrow}f\left(\sum\limits_{i=r+1}^{n}\lambda_i\cdot b_i\right)=0$

     $\Rightarrow\sum\limits_{i=r+1}^{n}\lambda_i\cdot b_i\in\operatorname{Kern} f$

     $\Rightarrow\sum\limits_{i=r+1}^{n}\lambda_i\cdot b_i=\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i\cdot b_i$ ($\mu_1,\ldots,\mu_r\in K$ geeignet)

     $\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{r}(-\mu_i)\cdot b_i+\sum\limits_{i=r+1}^{n}\lambda_i\cdot b_i=0$

     $\overset{b_1,\ldots,b_n\text{Basis von}V}{\Longrightarrow}-\mu_i=0\ (i=1,\ldots,r),\ \lambda_i=0\ (i=r+1,\ldots,n)$

2. Somit $\dim \operatorname{Kern} f = r$, $\dim \operatorname{Bild} f = n - r \Rightarrow$ Behauptung.

Bemerkung: Aus der Dimensionsformel 3.21 folgt mit Lemma 3.15 wieder Corollar 3.19.

Rang einer Matrix

3.22 Definition

Sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$, $A = (a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{lll} \text{Spaltenraum}(A) & := \text{span}(a_1, \dots, a_n) & \\ \text{Spaltenrang}(A) & := \dim \text{Spaltenraum}(A) & [\text{Anzahl der linear unabhängigen Spalten von } A] \\ \text{Zeilenraum}(A) & := \text{span}(a^{(1)}, \dots, a^{(m)}) & \\ \text{Zeilenrang}(A) & := \dim \text{Zeilenraum}(A) & [\text{Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von } A] \end{array}$$

Bemerkungen:

1. $\text{Spaltenraum}(A) = \underbrace{\{Ax : \ x \in K^n\}}_{=\text{Bild}\, A}$

   [Denn: $\text{span}(a_1, \dots, a_n) = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a_i : \ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\} = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot Ae_i : \ \lambda \in K^n\} = \{A \underbrace{(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i)}_{\lambda} : \ \lambda \in K^n\} = \{Ax : \ x \in K^n\}$]

   $\text{Spaltenrang}(A) = \dim \text{Bild}\, A$

2. $\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A^\top)$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Zeilenrang}(A) = 2 \\ \text{Spaltenrang}(A) = 2 \end{array}$$

3.23 Lemma

Sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$, $S \in K^{m\times m}$ invertierbar, $T \in K^{n\times n}$ invertierbar. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} \text{Spaltenrang}(S \cdot A \cdot T) & = & \text{Spaltenrang}(A) \\ \text{Zeilenrang}(S \cdot A \cdot T) & = & \text{Zeilenrang}(A) \end{array}$$

Beweis:

1. Zeige: $\text{Spaltenrang}(A \cdot T) = \text{Spaltenrang}(A)$

   $\text{Spaltenrang}(A) \overset{\text{Bem.1}}{=} \dim \{A \cdot x : \ x \in K^n\} \overset{\substack{T(K^n)=K^n \\ \text{weil } T \text{ invertierbar} \\ \downarrow}}{=} \dim \{A \cdot x : \ x \in T(K^n)\} = \dim\{A \cdot x : \ x = T \cdot y, \ y \in K^n\} = \dim \{A \cdot T \cdot y : \ y \in K^n\} = \text{Spaltenrang}(A \cdot T)$

2. Spaltenrang$(S\cdot A)$ = Spaltenrang(A)
   Spaltenraum$(A) = \operatorname{span}(A\cdot e_1, \dots, A\cdot e_n)$.
   $r :=$ Spaltenrang(A)
   $\cdot A\cdot e_{j_1}, \dots, A\cdot e_{j_r}$ sei Basis des Spaltenraums von $A \overset{\text{Lemma3.16c}}{\Longrightarrow} S\cdot A\cdot e_{j_1}, \dots, S\cdot A\cdot e_{j_r}$ Basis von $\operatorname{span}(S\cdot A\cdot e_1, \dots, S\cdot A\cdot e_n) \Rightarrow$ Spaltenrang$(S\cdot A) = r =$ Spaltenrang(A)

3. Spaltenrang$(S\cdot A\cdot T) \overset{1.}{=}$ Spaltenrang$(S\cdot A) \overset{2.}{=}$ Spaltenrang(A)

4. Zeilenrang$(S\cdot A\cdot T) \overset{\text{Bem.2 zu 3.22}}{=}$ Spaltenrang$((S\cdot A\cdot T)^\top)$ = Spaltenrang$(T^\top\cdot A^\top\cdot S^\top) \overset{3.}{=}$ Spaltenrang$(A^\top) \overset{\text{Bem.2 zu 3.22}}{=}$ Zeilenrang(A)

3.24 Satz und Definition (Rang von A)

Sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$. Dann gilt:

$$\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A)\ .$$

Diese Zahl wird als Rang von A (Schreibweise: $\operatorname{rang} A$) bezeichnet.

Beweis:
Nach Satz 2.17 gibt es $G \in K^{m\times m}$ und $H \in K^{n\times n}$, beide invertierbar, und $r \in \{0, \dots, \min(m, n)\}$, so dass $A = G \cdot \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$
Aus Lemma 3.23 folgt

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{Spaltenrang}(A) & = & \text{Spaltenrang}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r \\ \text{Zeilenrang}(A) & = & \text{Zeilenrang}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r \end{array}\right\} =$$

3.25 Folgerung

Sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$. Dann gilt:

(a) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^\top$,

(b) $\operatorname{rang} A \leq \min(m, n)$,

(c) $\operatorname{rang}(A\cdot B) \leq \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$,

(d) $S \in K^{m\times m}$ invertierbar, $T \in K^{n\times n}$ invertierbar $\Rightarrow$ $\operatorname{rang}(S\cdot A\cdot T) = \operatorname{rang} A$.

Beweis:

(a) Satz 3.24 und Bem. 1 zu 3.22.

(b) $\operatorname{rang} A \overset{\text{Bild } A\subset K^n}{\leq} \dim K^n = n, \quad \operatorname{rang} A^\top \overset{\text{Bild } A^\top\subset K^m}{\leq} m \overset{(a)}{\Longrightarrow} \operatorname{rang} A \leq \min(m, n)$.

(c) $\operatorname{rang}(A\cdot B) \overset{\text{Bem.1 zu 3.22}}{=} \dim \underbrace{\operatorname{span}\{A\cdot \overbrace{B\cdot x}^{\in K^n} :\ x\in K^r\}}_{\subset \operatorname{span}\{Ay:\ y\in K^n\}}$

$$\leq \dim \operatorname{span}\{Ay :\ y\in K^n\} = \operatorname{rang} A \qquad (\sharp)$$

$$\operatorname{rang}(A\cdot B) \overset{(a)}{=} \operatorname{rang}(A\cdot B)^\top = \operatorname{rang}(B^\top\cdot A^\top) \overset{(\sharp)}{\leq} \operatorname{rang} B^\top \overset{(a)}{=} \operatorname{rang} B \qquad (\sharp\sharp)$$

$$\overset{(\sharp),(\sharp\sharp)}{\Longrightarrow} \operatorname{rang} A\cdot B \leq \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$$

(d) Lemma 3.23 und Satz 3.24.

$\boxed{\text{Zeilenstufenform}}$

Mit elementaren Zeilenumformungen vom Typ II und III lässt sich nicht immer Dreiecksform mit nicht verschwindenden Diagonalelementen erreichen. Problematisch sind die in der aktuellen Untermatrix führenden Nullspalten. Übergeht man diese im Algorithmus, so gelangt man zur Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}
0 & 0 & \circledast & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & \circledast & * & * & * & * & * & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \circledast & * & * & * & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \dots & \dots & \circledast & * \\
0 & & & & & & & & & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & 0 & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \uparrow & \uparrow & & & & & & \uparrow & \\
 & & j_1 & j_2 & & & & & & j_r &
\end{array}\end{array}
\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}}\right\} r$$

$*$ Matrixelement
$\circledast$ Matrixelement $\neq 0$

Formal aufgeschrieben erhält man:

3.26 Definition (Zeilenstufenform)

Sei K ein Körper. $A \in K^{m\times n}$ mit $A\neq 0$ hat Zeilenstufenform, wenn es $r\in\{1,\dots,\min(m,n)\}$ und $j_1,\dots,j_r\in\mathbb{N}$ mit $1\leq j_1<j_2<\dots<j_r\leq n$ gibt, so dass
$a_{ij}\neq 0 \quad i=k,\ j=j_k \qquad (k=1,\dots,r)$
$a_{ij}=0 \quad i>k,\ j_k\leq j\leq j_{k+1}-1 \quad (k=0,\dots,r)$
mit $j_0:=1$ und $j_{r+1}:=n+1$.

3.27 Satz (Transformation auf Zeilenstufenform, Rang)

Sei K ein Körper. Jede Matrix $A\in K^{m\times n}$ mit $A\neq 0$ kann durch elementare Zeilenumformungen vom Typ II und III auf Zeilenstufenform gebracht werden. Es gilt $\operatorname{rang} A = r$ (mit r aus Definition 3.26).

Bemerkung: Satz 3.26 gestattet die Bestimmung des Matrixrangs auf einfachere Weise als mit der Äquivalenznormalform 2.17.

Beweis:
Die Transformation auf Zeilenstufenform erfolgt wie oben beschrieben.

[Der Unterschied zum Gaußalgorithmus 2.26 besteht darin, dass folgende Situation eintreten kann:

$$\begin{array}{lll}
\circledast & * \quad * \quad * \quad * \qquad\qquad\qquad\qquad * & \leftarrow k\text{-te Zeile} \\
& \boxed{\left.\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & * \\ & & & * \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & * \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{mind. ein} \\ \text{Matrixelement} \\ \neq 0 \end{array}} & \text{aktuelle Untermatrix} \\
\uparrow & \underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{\text{mehrere}\\ \text{Nullsp.}\\ \text{der}\\ \text{Unter-}\\ \text{matrix}}} \quad \uparrow & \\
j_r & \qquad\qquad\quad j_{r+1} &
\end{array}$$

Außerdem können die Spalten $1, \ldots, j_1 - 1$ Nullspalten sein.

Alle diese Spalten werden einfach unverändert gelassen.]

Also gibt es eine invertierbare Matrix $\tilde{G} \in K^{n \times n}$ (als Produkt von Elementarmatrizen) und eine Zeilenstufenmatrix $\tilde{R} \in K^{m \times n}$, so dass

$$A = \tilde{G} \cdot \tilde{R}$$

Nach 3.25d folgt $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{R} = \operatorname{rang} \hat{R}$

Zeige: $\operatorname{rang} \tilde{R} = r$

$$\tilde{R} = \left(\begin{array}{c} \hat{R} \\ 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \} \ r \text{ Zeilen} \\ \} \ m - r \text{ Zeilen} \end{array}. \text{ Also } \operatorname{rang} \tilde{R} = \text{Zeilenrang}(\tilde{R}) = \text{Zeilenrang}(\hat{R}) = \operatorname{rang} \hat{R}.$$

1. $\operatorname{rang} \hat{R} \overset{3.25\text{b}}{\leq} r$.

2. $\hat{R} = (\hat{r}_1 \ldots \hat{r}_n)$. Bhpt.: $\hat{r}_{j_1}, \ldots, \hat{r}_{j_r}$ sind linear unabhängig.

   $$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot r_{j_k} = 0 \ \Rightarrow \ (\hat{r}_{j_1} \ldots \hat{r}_{j_r}) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0,$$

   weil $(\hat{r}_{j_1} \ldots \hat{r}_{j_r}) \in K^{r \times r}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix mit nicht verschwindenden Diagonalelementen ist.
   Somit $\operatorname{rang} \hat{R} = \text{Spaltenrang}(\hat{R}) \geq r$.

Allgemeine lineare Gleichungssysteme

($A{\cdot}x = b$ mit $A \in K^{m\times n}, x \in K^n, b \in K^m$)

3.28 Lemma

Sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$, $r = \operatorname{rang} A$, $b \in K^m$.

(a) Es gilt: $\dim \{x \in K^n : A{\cdot}x = 0\} = n - r$.

(b) Falls $x^* \in K^n$ existiert mit $A{\cdot}x^* = b$, dann gilt:
$\{x \in K^n : A{\cdot}x = b\} \; = \; \{x^* + x^{**} : \; x^{**} \in K^n, A{\cdot}x^{**} = 0\}$.

Bemerkung: Nach (b) erhält man die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A{\cdot}x = b$ durch Addition einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems.

Beweis:

(a) Folgt aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen 3.21:
$\dim \operatorname{Kern} A + \underbrace{\dim \operatorname{Bild} A}_{r} = \underbrace{\dim K^n}_{n}$.

(b) $A{\cdot}x = b \iff A{\cdot}(x^*+(x-x^*)) = b \overset{A\cdot x^{**}=b}{\iff} A{\cdot}\underbrace{(x - x^*)}_{=:x^{**}} = 0 \iff x = x^*+x^{**} \wedge Ax^{**} = 0$

3.29 Satz (Auflösbarkeit des allgemeinen linearen Gleichungssystems)

Sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$, $b \in K^m$. Dann gilt:

(a) $A{\cdot}x = b$ besitzt mindestens eine Lösung $x \in K^n \iff \operatorname{rang}(A \;\; b) = \operatorname{rang} A$.

(b) $A{\cdot}x = b$ besitzt höchstens eine Lösung $x \in K^n \Longleftarrow \operatorname{rang} A = n$.

(c) $A{\cdot}x = b$ besitzt genau eine Lösung $x \in K^n \iff \operatorname{rang}(A \;\; b) = \operatorname{rang} A = \text{n}$.

Bemerkung: Unter $(A \;\; b)$ ist die aus A und b zusammengesetzte Matrix $\in K^{m\times(n+1)}$ zu verstehen ("erweiterte Matrix").

Beweis:

(a) $\operatorname{rang}(A \;\; b) = \operatorname{rang} A \iff \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n, b) = \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n) \overset{3.7c}{\iff} b \in \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n)$
$\iff \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j{\cdot}a_j = b \iff \exists\, \lambda \in K^n : \; A{\cdot}\lambda = b$.

(b) $A \cdot x = b$ besitzt höchstens eine Lösung $\iff \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \cdot a_j = b$ besitzt höchstens eine Lösung $\overset{Bem.zu3.6}{\Longleftarrow} a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig $\iff \operatorname{rang} A = n$.

(c) $'' \Leftarrow''$: Folgt sofort aus (a) und (b).
$'' \Rightarrow''$: $A{\cdot}x = b$ besitzt genau eine Lösung $\overset{3.28b}{\Longrightarrow} A{\cdot}x = 0$ besitzt nur die Lösung $x = 0$
$\overset{vgl.(b)}{\iff} a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig $\iff \operatorname{rang} A = n$.
Die erste Gleichung folgt aus (a).

3.30 Berechnung der Lösungen des allgemeinen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{lcl} A & \overset{\text{EZU II,III}}{\longrightarrow} & \tilde{R} \quad \text{(Zeilenstufenform)} \\ b & \overset{\text{EZU II,III}}{\longrightarrow} & \tilde{b} \end{array}$$

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; \tilde{R}x = \tilde{b} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{\hat{b}} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}r \text{ Zeilen} \\ \}n-r \text{ Zeilen} \end{array}$$

$Ax = b$ besitzt mindestens eine Lösung $\Leftrightarrow \hat{\hat{b}} = 0$

[Das ergibt sich aus dem Lösungsverfahren, kann aber auch direkt so eingesehen werden: $\hat{\hat{b}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \tilde{b} \in \operatorname{Span}(\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_n) \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rang}(\tilde{R}\;\; \tilde{b}) = \operatorname{rang}\tilde{R} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rang}(A\;\; b) = \operatorname{rang} A.$]

Sei ab jetzt $\hat{\hat{b}} = 0$.

Wir betrachten die Spalten $\hat{r}_{j_1}, \ldots, \hat{r}_{j_r}$ von $\hat{R}$ und schreiben $\hat{R}\cdot x = \hat{b}$ in der Form

$$\sum_{k=1}^{r} x_{j_k}\cdot\hat{r}_{j_k} = \hat{b} - \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{j_1,\ldots,j_r\}} x_j\cdot\hat{r}_j, \text{ d.h.}$$

$$(\hat{r}_{j_1}\ldots\hat{r}_{j_k})\cdot \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_k} \end{pmatrix} = \hat{b} - \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{j_1,\ldots,j_r\}} \overbrace{x_j}^{\mu_j}\cdot\hat{r}_j \qquad (*)$$

Setze $x_j := \underbrace{\mu_j}_{\text{beliebig}} \in K \quad (j \in \{1,\ldots,n\}\setminus\{j_1,\ldots,j_r\})$

Durch diese μ_j ist die rechte Seite von $(*)$ festgelegt. Da auf der linken Seite eine Dreiecksmatrix mit nicht verschwindenden Diagonalelementen steht, ist $(*)$ eindeutig nach $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ auflösbar.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

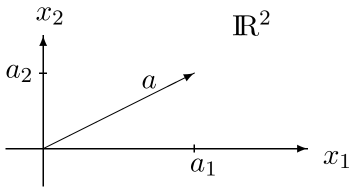
$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \\ A \qquad\qquad b \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -5 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ j_1 & j_2 & j_3 & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \mu_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 - 2\mu_4 \\ -5x_2 - 7x_3 &= 1 + 5\mu_4 \\ -4x_3 &= 4\mu_4 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x_3 &= -\mu_4 \\ x_2 &= -\tfrac{1}{5}(1-2\mu_4) = -\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{5}\mu_4 \\ x_1 &= 1 - 2\mu_4 + 3\mu_4 + \tfrac{2}{5}(1-2\mu_4) = \tfrac{7}{5} + \tfrac{1}{5}\mu_4 \end{aligned}$$

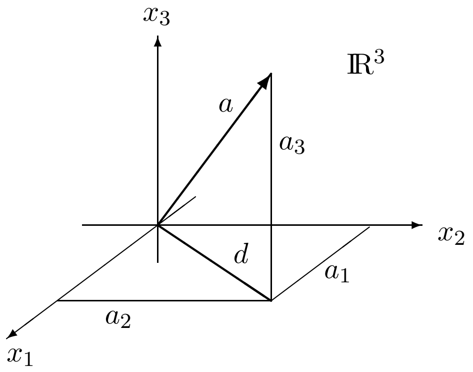
$$\text{d.h.} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\mu \in \mathbb{R})$$

§4 $\mathbb{R}^n$ als euklidischer Vektorraum

Länge, Skalarprodukt und Orthogonalität in $\mathbb{R}^n$



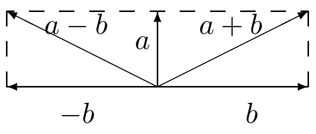
$$\underbrace{|a|}_{\text{Länge von } a} = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$$



$$\begin{aligned} |a| &= \sqrt{d^2+a_3^2}\,, \qquad d = \sqrt{a_1^2+a_2^2} \\ &= \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \end{aligned}$$

4.1 Definition (Länge)
Für $x \in \mathbb{R}^n$ heißt $|x| := \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ Länge von x.

Wir wollen mit Hilfe der Länge Orthogonalität zweier Vektoren a und b definieren:



$$\begin{aligned} a \perp b :&\Leftrightarrow |a-b| = |a+b| \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 \\ &\Leftrightarrow 4\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot b_i = 0 \end{aligned}$$

4.2 Definition (Kanonisches Skalarprodukt, Orthogonalität)

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt $\langle x,y\rangle := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ (kanonisches) Skalarprodukt von x und y.

(b) $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal, wenn $\langle x,y\rangle = 0$.
Schreibweise: $x \perp y$.

Bemerkungen:

1. $\langle x,y\rangle = x^\top\cdot y = y^\top\cdot x \quad (x,y \in \mathbb{R}^n)$
2. $|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$

4.3 Lemma

Die Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ erfüllt

(a)
$$\begin{array}{lll} \langle x+x',y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle & (x,x',y \in \mathbb{R}^n) & \\ \langle \lambda\cdot x,y\rangle \quad = \lambda\cdot\langle x,y\rangle & (\lambda \in \mathbb{R},\ x,y \in \mathbb{R}^n) & \\ \langle x,y+y'\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,y'\rangle & (x,y,y' \in \mathbb{R}^n) & \\ \langle x,\lambda\cdot y\rangle \quad = \lambda\cdot\langle x,y\rangle & (\lambda \in \mathbb{R},\ x,y \in \mathbb{R}^n) & (\text{"Bilinearität"}) \end{array}$$

(b) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \quad (x,y \in \mathbb{R}^n)$ (”Symmetrie”)

(c) $\langle x,x\rangle \ > \ 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0)$ (”Positive Definitheit”)

Bemerkungen:

1. Ersetzt man in Lemma 4.3 $\mathbb{R}^n$ durch einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V, so heißt eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, die (a) erfüllt, Bilinearform auf V. Wenn sie zusätzlich (b) und (c) erfüllt, spricht man von einem Skalarprodukt auf V. Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt wird als Euklidischer Vektorraum bezeichnet.

2. Für $x,y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\begin{aligned} &\langle \lambda\cdot x+\mu\cdot y, \lambda\cdot x+\mu\cdot y\rangle = \langle \lambda\cdot x+\mu\cdot y, \lambda\cdot x\rangle + \langle \lambda\cdot x+\mu\cdot y, \mu\cdot y\rangle \\ &= \langle \lambda\cdot x, \lambda\cdot x\rangle + \langle \mu\cdot y, \lambda\cdot x\rangle + \langle \lambda\cdot x, \mu\cdot y\rangle + \langle \mu\cdot y, \mu\cdot y\rangle \\ &= \lambda^2\langle x,x\rangle + \lambda\mu\underbrace{\langle y,x\rangle}_{=\langle x,y\rangle} + \lambda\mu\langle x,y\rangle + \mu^2\langle y,y\rangle \\ &= \lambda^2\langle x,x\rangle + 2\lambda\mu\langle x,y\rangle + \mu^2\langle y,y\rangle \end{aligned}$$

4.4 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Seien $x,y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $|\langle x,y\rangle| \leq |x|\cdot|y|$.
Gleichheit tritt genau dann ein, wenn x,y linear abhängig sind.

Beweis:

1.F: $x = 0$. Dann sind x,y linear abhängig und es gilt $|\langle x,y\rangle| = 0 = |x|\cdot|y|$

2.F: $x \neq 0$.
[Erinnerung: Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Betrachte
$a\cdot\lambda^2 + b\cdot\lambda + c = 0 \qquad (*)$
$D := b^2 - 4ac$ (Diskriminante)
$(*)$ hat genau eine reelle Lösung $\lambda \iff D = 0$
$(*)$ hat keine reelle Lösung $\lambda \iff D < 0$]

2.1: x,y linear unabhängig $\overset{x\neq 0}{\iff} \forall\,\lambda \in \mathbb{R}:\ y \neq \lambda\cdot x$
[“$\Rightarrow$“ Klar. [Sonst $\lambda\cdot x + (-1)\cdot y = 0$]
“$\Leftarrow$“ $\mu\cdot x + \nu\cdot y = 0$. Zeige: $\mu = \nu = 0$.
Wäre $\nu \neq 0$, so würde $y = (-\frac{\mu}{\nu})\cdot x$ folgen im Widerspruch zu $y \neq \lambda\cdot x$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Daher $\nu = 0$, also $\mu\cdot x = 0$, somit $\mu = 0$ wegen $x \neq 0$]

$$\iff \underbrace{\langle \lambda\cdot x - y, \lambda\cdot x - y\rangle}_{|\lambda x - y|^2 \neq 0} \neq 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\iff \lambda^2\cdot\langle x,x\rangle - \lambda\cdot 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \neq 0 \quad (\lambda\in\mathbb{R})$$
$$\overset{\text{Diskr.}<0}{\iff} 4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle < 0 \iff |\langle x,y\rangle| < \underbrace{\sqrt{\langle x,x\rangle}}_{|x|}\underbrace{\sqrt{\langle y,y\rangle}}_{|y|}$$

2.2: x,y linear abhängig $\overset{2.1}{\iff} \exists\lambda\in\mathbb{R}:\ y=\lambda\cdot x \iff \exists_1\lambda\in\mathbb{R}:\ y=\lambda\cdot x$

[Denn: $y=\lambda\cdot x=\lambda'\cdot x \Rightarrow (\lambda-\lambda')\cdot x = 0 \overset{x\neq 0}{\Longrightarrow} \lambda=\lambda'$]

$$\overset{\text{vgl.2.1}}{\iff} \exists_1\lambda\in\mathbb{R}:\ \lambda^2\cdot\langle x,x\rangle - \lambda\cdot 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = 0 \overset{\text{Diskr.}=0}{\iff} |\langle x,y\rangle| = |x|\cdot|y|$$

4.5 Lemma

Für die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x\mapsto |x|$ gilt:

(a) $|x|\geq 0 \qquad (x\in\mathbb{R}^n)$
$|x| = 0 \iff x = 0 \qquad (x\in\mathbb{R}^n)$

(b) $|\lambda\cdot x| = |\lambda||x| \qquad (\lambda\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n)$

(c) $|x+y|\leq |x|+|y| \qquad (x,y\in\mathbb{R}^n)$ (Dreiecksungleichung)

Bemerkung:
Ersetzt man in Lemma 4.5 $\mathbb{R}^n$ durch einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V, so heißt eine Abbildung $V\to\mathbb{R}$, die (a)-(c) erfüllt, Norm auf V. Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer Norm wird als normierter Raum bezeichnet.

Beweis:
(a),(b) Klar.
(c)
$$|x+y|^2 = \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \overset{4.4}{\leq} \underbrace{\langle x,x\rangle}_{|x|^2} + 2\underbrace{\sqrt{\langle x,x\rangle}}_{|x|}\underbrace{\sqrt{\langle y,y\rangle}}_{|y|} + \underbrace{\langle y,y\rangle}_{|y|^2} = (|x|+|y|)^2$$

Winkel

4.6 Lemma und Definition (Winkel)

Seien $x,y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Dann gibt es genau ein $\varphi\in[0,\pi]$ mit $\cos\varphi = \dfrac{\langle x,y\rangle}{|x|\cdot|y|}$.
φ heißt Winkel zwischen x und y. Schreibweise: $\varphi = \sphericalangle(x,y)$.

Bemerkung: $\langle x,y\rangle = |x|\cdot|y|\cdot\cos\varphi$ mit $\varphi=\sphericalangle(x,y)$.

Beweis:
Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt $-1\leq \dfrac{\langle x,y\rangle}{|x|\cdot|y|}\leq 1$.
Der Kosinus bildet $[0,\pi]$ bijektiv auf $[-1,1]$ ab, also gibt es ein eindeutig bestimmtes $\varphi\in[0,\pi]$ mit $\cos\varphi = \dfrac{\langle x,y\rangle}{|x|\cdot|y|}$.

4.7 Folgerung

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt:

(a) $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x|\cdot|y|\cdot\cos\varphi$ mit $\varphi = \sphericalangle(x,y)$ (Kosinussatz)

(b) $x \perp y \Rightarrow |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ (Satz von Pythagoras)

Beweis:

(a) Übungsaufgabe

(b) $|x+y|^2 = |x|^2 + 2\underbrace{\langle x,y\rangle}_{0} + |y|^2$.

Orthogonale Matrizen

4.8 Definition

$b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}^n$ heißt Orthonormalsystem (ONS), wenn $\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, k)$.

Beispiel: $e_1, \dots, e_k$ ist für $k \le n$ ein ONS.

4.9 Lemma (Entwicklung nach einer Orthonormalbasis)

Sei $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^n$ ein Orthonormalsystem. Dann ist $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ (Orthonormalbasis, ONB) und es gilt

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle b_j, x\rangle \cdot b_j \quad (x \in \mathbb{R}^n) \qquad (*)$$

Beweis:

$b_1, \dots, b_n$ ONS $\Rightarrow b_1, \dots, b_n$ linear unabhängig

[Denn: $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot b_j = 0 \Rightarrow \langle b_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot b_j\rangle = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle b_i, b_j\rangle}_{\delta_{ij}} = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \qquad (i = 1, \dots, n)$]

$\overset{\dim \mathbb{R}^n = n \text{ und } 3.14}{\Longrightarrow} b_1, \dots, b_n$ Basis von $\mathbb{R}^n \Rightarrow \exists_1 \lambda \in \mathbb{R}^n : \; x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot b_j$

$\Rightarrow \langle b_i, x\rangle = \langle b_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot b_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle b_i, b_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \lambda_i$

4.10 Definition

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt orthogonal, wenn $A^\top \cdot A = E_n$.

Bemerkungen:

(a) Diese Forderung ist äquivalent dazu, dass die Spalten von A ein Orthonormalsystem bilden.

(b) Die Matrix heißt ortho*gonal*, ihre Spalten bilden aber ein Ortho*normal*system.

Beispiel: für ein Orthogonalmnatrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

4.11 Satz

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind äquivalent:

(a) A orthogonal,

(b) $A^\top$ orthogonal, d.h. $A{\cdot}A^\top = E_n$,

(c) A invertierbar und $A^{-1} = A^\top$.

[*Bemerkung:* (b) besagt, dass die Zeilen von A ein Orthogonalsystem (in$\mathbb{R}^{1\times n}$) bilden.]

Beweis:

(a)⇒(c): $A^\top{\cdot}A = E_n \overset{2.21}{\Longrightarrow} A$ und $A^\top$ invertierbar $\Longrightarrow A^\top \underbrace{A{\cdot}A^{-1}}_{E_n} = A^{-1} \Rightarrow A^\top = A^{-1}$

(b)⇒(c): $A^\top$ orthogonal $\Longleftrightarrow \underbrace{(A^\top)}_{A}{}^\top A^\top = E_n \overset{2.21}{\Longrightarrow} A$ und $A^\top$ invertierbar

$$\Longrightarrow \underbrace{A^{-1}{\cdot}A}_{E_n} A^\top = A^{-1} \Rightarrow A^\top = A^{-1}$$

(c)⇒(a): $A^\top{\cdot}A \overset{(c)}{=} A^{-1}A = E_n$

(c)⇒(b): analog

4.12 Satz

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind äquivalent:

(a) A orthogonal,

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \ |A{\cdot}x| = |x|$ (längentreue Abbildung, Isometrie),

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \ \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$.

Beweis:

(a)⇒(b): $|Ax|^2 = (Ax)^\top{\cdot}(Ax) = x^\top{\cdot}\underbrace{A^\top{\cdot}A}_{E_n}x = x^\top{\cdot}x = |x|^2$

(b)⇒(c): Es gilt $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2)$ $(*)$ (Übungsaufgabe)
also $\langle Ax, Ay\rangle = \frac{1}{4}(|Ax+Ay|^2 - |Ax-Ay|^2) = \frac{1}{4}(|A{\cdot}(x+y)|^2 - |A{\cdot}(x-y)|^2)$

$$\overset{(b)}{=} \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2) \overset{(*)}{=} \langle x, y\rangle$$

(c)⇒(a): $\langle x, (A^\top{\cdot}A - E_n){\cdot}y\rangle = \langle A{\cdot}x, A{\cdot}y\rangle - \langle x, y\rangle \overset{(c)}{=} 0 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$

$$\overset{x:=(A^\top{\cdot}A-E_n)y}{\Longrightarrow} |(A^\top{\cdot}A - E_n){\cdot}y|^2 = 0 \quad (y \in \mathbb{R}^n) \Longrightarrow A^\top{\cdot}A = E_n$$

[*Bemerkung:*
Allgemeiner gilt: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, d.h. $|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$, dann gibt es $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Orthogonalmatrix und $b \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x) = A{\cdot}x + b \quad (x \in \mathbb{R}^n)$]

§5 Determinanten

Betrachte das folgende reelle lineare Gleichungssystem:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}\right\} \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := a_{11}a_{22} - \overbrace{a_{12}a_{21}}^{a_{21}a_{12}}$$

Durch Nachrechnen: Falls $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ist, dann ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar und es gilt

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

(Cramersche Regel 1750, bereits für allgemeines $n \in \mathbb{N}$)

5.1 Definition und Satz (Determinante)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau eine Abbildung $\det : (K^n)^n \to K$, so dass gilt:

(a) det ist eine Multilinearform auf K^n, d.h. für $j = 1, \ldots, n$ gilt:
$\det(a_1, \ldots, \lambda \cdot a_j, \ldots, a_n) = \lambda \cdot \det(a_1, \ldots, a_n) \quad (a_1, \ldots, a_n \in K^n,\ \lambda \in K)$
$\det(a_1, \ldots, a_j' + a_j'', \ldots, a_n) = \det(a_1, \ldots, a_j', \ldots, a_n) + \det(a_1, \ldots, a_j'', \ldots, a_n)$
$(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n, a_j', a_j'' \in K^n)$.

(b) det ist alternierend, d.h. sind von den n Vektoren $a_1, \ldots, a_n \in K^n$ zwei gleich, so gilt $\det(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

(c) det ist normiert, d.h. $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Für $A = (a_1 \ldots a_n) \in K^{n \times n}$ setzen wir $\det A := \det(a_1, \ldots, a_n)$.

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir noch einige Hilfssätze und Lemmata.

5.2 Lemma

Sei det eine alternierende Multilinearform auf K^n, $a_1, \ldots, a_n \in K^n$. Dann gilt:

(a) $a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig $\Longrightarrow \det(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

(b) $\det(\ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots) = -\det(\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots) \quad (i < j)$.
(D.h. vertauscht man zwei der Vektoren $a_1, \ldots, a_n$, so ändert sich das Vorzeichen von det.)

Beweis:

(a) O.E.d.A.: a_n linear abhängig von $a_1, \ldots, a_{n-1}$, d.h. $a_n = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_j \cdot a_j$.

Dann $\det(a_1, \ldots, a_n) \overset{5.1a}{=} \sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_j \underbrace{\det(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_j)}_{=0 \text{ nach } 5.1b} = 0$.

(b) $\det(\ldots, a_i + a_j, \ldots, a_i + a_j, \ldots) = 0 \overset{5.1a}{\Longrightarrow} \underbrace{\det(\ldots, a_i, \ldots, a_i, \ldots)}_{=0} + \det(\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots) +$ $\det(\ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots) + \underbrace{\det(\ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots)}_{=0} = 0 \Rightarrow$ Behauptung .

5.3 Hilfssatz

Sei det eine alternierende Multilinearform auf K^n, $A \in K^{n \times n}$, $\lambda \in K$. Dann gilt (mit den Bezeichnungen aus 2.15)

(a) $\det(A \cdot S_j(\lambda)) = \det A \cdot \lambda$,

(b) $\det(A \cdot Q_i^j(\lambda)) = \det A \quad (i \neq j)$,

(c) $\det(A \cdot P_i^j) = -\det A$.

Beweis:

(a) $\det(A \cdot S_j(\lambda)) = \det(a_1, \ldots, \lambda \cdot a_j, \ldots, a_n) \overset{5.1a}{=} \lambda \cdot \det A$

(b) $\det(A \cdot Q_j^i(\lambda)) = \det(a_1, \ldots, \underbrace{a_j + \lambda \cdot a_i}_{j-\text{te Position}}, \ldots, a_n) \overset{5.1a,b}{=} \det A$

(c) $\det(A \cdot P_i^j) = -\det(\ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots) \overset{5.2b}{=} -\det A$

5.4 Folgerung und Hilfssatz

Sei det eine normierte alternierende Multilinearform auf K^n, $A \in K^{n \times n}$, $\lambda \in K$. Dann gilt (mit den Bezeichnungen aus 2.15)

(a) $\det(S_j(\lambda)) = \lambda, \quad \det(A \cdot S_j(\lambda)) = \det A \cdot \det S_j(\lambda)$

(b) $\det(Q_j^i(\lambda)) = 1, \quad \det(A \cdot Q_j^i(\lambda)) = \det A \cdot \det Q_j^i(\lambda)$

(c) $\det(P_i^j) = -1, \qquad \det(A \cdot P_i^j) = \det A \cdot \det P_i^j$

Beweis: linke Hälfte: 5.3 mit $A = E_n$
rechte Hälfte: linke Hälfte und 5.3

Die folgenden in §2, §3 implizit enthaltenen Aussagen werden in diesem Paragraphen noch häufiger benötigt.

5.5 Lemma

Sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt:

(a) $\operatorname{rang} A = n \Longleftrightarrow A$ invertierbar ,

(b) A invertierbar $\Longleftrightarrow A$ Produkt von Elementarmatrizen .

Beweis:

(a) $$\begin{aligned} A \text{ invertierbar } &\overset{2.20}{\Longleftrightarrow} A\lambda = 0 \text{ besitzt nur die Lösung } \lambda = 0 \\ &\Longleftrightarrow (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot a_j = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0) \\ &\Longleftrightarrow a_1, \ldots, a_n \text{ linear unabhängig} \Longleftrightarrow \operatorname{rang} A = n \ . \end{aligned}$$

(b) Äquivalenznormalform 2.17 mit $r = n$.

Beweis von Satz 5.1:

Eindeutigkeit: Seien $\det$ und $\widetilde{\det}$ normierte alternierende Multilinearformen auf K^n.
Zeige: $\det A = \widetilde{\det} A$.

1.F.: A invertierbar $\overset{5.5b}{\Longrightarrow} \exists\, C_1, \ldots, C_l$ Elementarmatrizen: $A = C_1 \cdot \ldots \cdot C_l$

$$\overset{5.4 \text{ re.Hälfte}}{\Longrightarrow} \det A = \det C_1 \cdot \ldots \cdot \det C_l$$

$$\overset{5.4 \text{ li.Hälfte}}{\Longrightarrow} \widetilde{\det} A = \widetilde{\det}\, C_1 \cdot \ldots \cdot \widetilde{\det}\, C_l \overset{5.4 \text{ re.Hälfte}}{=} \widetilde{\det}(C_1 \cdot \ldots \cdot C_l) = \widetilde{\det}\, A \ .$$

2.F.: A nicht invertierbar $\overset{5.5a}{\Longrightarrow} \operatorname{rang} A < n \Longrightarrow a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig

$$\overset{5.2a}{\Longrightarrow} \det(a_1, \ldots, a_n) = 0,\ \widetilde{\det}(a_1, \ldots, a_n) = 0 \Longrightarrow \det A = 0 = \widetilde{\det}\, A \ .$$

Existenz: Durch vollständige Induktion Beweis der Aussage

$\mathcal{A}(n) :\Longleftrightarrow$ es gibt eine normierte alternierende Multilinearform auf K^n

$\underline{\mathcal{A}(1) :}$ $A = (a_{11}),\ \det A := a_{11}$ erfüllt 5.1(a)-(c) $\surd$

$\underline{\mathcal{A}(n-1) \Rightarrow \mathcal{A}(n) \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2) :}$

Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ fest. Für $A \in K^{n\times n}$ setze $\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A^{(ij)}$

Dabei ist $A^{(ij)} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht:

$$A^{(ij)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

[*Beispiel:*
$n = 2,\ i = 1 :$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det A^{(11)} + (-1)^{1+2} a_{12} \cdot \det A^{(12)} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$n = 3,\ i = 1:$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\ ]$$

$$A = (a_1 \dots a_n) \quad a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in K^n,\ \hat{a}_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{i-1j} \\ a_{i+1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in K^{n-1}$$

Multilinearität:

$$\det(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{j-1}, \hat{a}_{j+1}, \dots, \hat{a}_n)$$

$$= (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1}, \hat{a}_{k+1}, \dots, \hat{a}_n) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{j-1}, \hat{a}_{j+1}, \dots, \hat{a}_n)$$

$$\begin{array}{ll} a_k \to \lambda \cdot a_k : & a_{ik} \to \lambda a_{ik} \\ & \det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{j-1}, \hat{a}_{j+1}, \dots, \hat{a}_n) \to \lambda \det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{j-1}, \hat{a}_{j+1}, \dots, \hat{a}_n) \quad (j \neq k) \\ a_k \to a'_k + a''_k : & a_{ik} \to a'_{ik} + a''_{ik} \\ & \det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k, \hat{a}_{j-1}, \hat{a}_{j+1}, \dots, \hat{a}_n) \\ & \to \det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}'_k, \hat{a}_{j-1}, \hat{a}_{j+1}, \dots, \hat{a}_n) + \det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}''_k, \hat{a}_{j-1}, \hat{a}_{j+1}, \dots, \hat{a}_n) \\ & \qquad (j \neq k) \end{array}$$

$\Longrightarrow \det : (K^n)^n \to K$ multilinear

Alterniertheit:

Sei $a_k = a_l$ mit $k < l$. Dann

$$\det(a_1, \dots, a_k, \dots, a_l, \dots, a_n) = (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1}, \hat{a}_{k+1}, \dots, \hat{a}_n)$$

$$+ (-1)^{i+l} a_{il} \det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{l-1}, \hat{a}_{l+1}, \dots, \hat{a}_n) + \sum_{\substack{j\neq k \wedge \\ j\neq l}} (-1)^{i+j} a_{ij} \underbrace{\det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{j-1}, \hat{a}_{j+1}, \dots, \hat{a}_n)}_{0}$$

$$\overset{l-(k+1)\text{ Vertauschungen}}{=} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot \det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{k-1}, \hat{a}_k, \hat{a}_{k+1}, \dots, \hat{a}_{l-1}, \hat{a}_{l+1}, \dots, \hat{a}_n) \cdot (-1)^{l-(k+1)}$$

$$+ (-1)^{i+l} a_{ik} \cdot \det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{l-1}, \hat{a}_{l+1}, \dots, \hat{a}_n)$$

$$= a_{ik} \cdot \det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{l-1}, \hat{a}_{l+1}, \dots, \hat{a}_n) \cdot ((-1)^{i+k} \cdot (-1)^{l-(k+1)} + (-1)^{i+l})$$

$$= (-1)^i \cdot a_{ik} \cdot \det(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{l-1}, \hat{a}_{l+1}, \dots, \hat{a}_n) \cdot \underbrace{((-1)^{l-1} + (-1)^l)}_{0}$$

$\Longrightarrow \det : (K^n)^n \to K$ alternierend

Normiertheit:

$$\begin{aligned} \det(e_1, \dots, e_n) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \underbrace{e_{ij}}_{\delta_{ij}} \cdot \det(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{j-1}, \hat{e}_{j+1}, \dots, \hat{e}_n) \\ &= (-1)^{i+j} \underbrace{\det(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{i-1}, \hat{e}_{i+1}, \dots, \hat{e}_n)}_{\det E_{n-1}} = 1 \qquad \text{wegen } E_n^{(ii)} = E_{n-1} \end{aligned}$$

Bemerkung:

Wegen der Eindeutigkeit der Determinante kann man nach jeder Zeile entwickeln, d.h. für $A \in K^{n\times n}$ gilt: $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{(ij)} \quad (i = 1, \dots, n)$.

Mit det bezeichnen wir im folgenden die nach Satz 5.1 eindeutig bestimmte normierte alternierende Multilinearform auf K^n.

5.6 Rechenregeln

Seien $A, B \in K^{n\times n}$, $\lambda \in K$. Dann gilt:

(a) $\det(\lambda\cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$,

(b) $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$ (Determinantenmultiplikationssatz) ,

(c) A invertierbar $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$,

(d) A invertierbar $\Longrightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$,

(e) $\det A^\top = \det A$.

Bemerkung:
Im allg. gilt: $\det(\lambda\cdot A) \neq \lambda \cdot \det A$
$\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Beweis:

(a) $\det(\lambda\cdot A) = \det(\lambda\cdot a_1, \dots, \lambda\cdot a_n) = \lambda\cdot\det(a_1, \lambda\cdot a_2, \dots, \lambda\cdot a_n) = \dots = \lambda^n\cdot\det(a_1, \dots, a_n)$.

(c) „$\Rightarrow$“ : A invertierbar $\overset{5.5b}{\Longrightarrow} A = \underbrace{C_1 \cdot \ldots \cdot C_l}_{\text{El.matrizen}} \overset{5.4 \text{ re.Hä.}}{\Longrightarrow} \det A = \underbrace{\det C_1}_{\neq 0} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\det C_l}_{\neq 0} \overset{5.4 \text{ li.Hä.}}{\neq} 0$

„$\Leftarrow$“ : A nicht invertierbar $\overset{5.5a}{\Longrightarrow} \operatorname{rang} A < n$
$\Longrightarrow a_1, \dots, a_n$ linear abhängig $\overset{5.2a}{\Longrightarrow} \det(a_1, \dots, a_n) = 0$

(b) Vorbemerkung: $A \cdot B$ invertierbar $\Longleftrightarrow A$ invertierbar $\wedge$ B invertierbar
[„$\Rightarrow$“ : Übungsaufgabe 43a „$\Leftarrow$“ : 2.14a]

1.F.: $A \cdot B$ invertierbar.
$\overset{\text{Vorbem.}}{\Longrightarrow} A$ invertierbar $\wedge$ B invertierbar $\Longrightarrow A = \underbrace{C_1 \cdot \ldots \cdot C_l}_{\text{El.matrizen}},\ B = \underbrace{D_1 \cdot \ldots \cdot D_p}_{\text{El.matrizen}} \Longrightarrow$

$$\det(A\cdot B) = \det(C_1\cdot\ldots\cdot C_l\cdot D_1\cdot\ldots\cdot D_p) \overset{5.4}{=} \underbrace{\det(C_1) \cdot \ldots \cdot \det(C_l)}_{\det A} \cdot \underbrace{\det(D_1) \cdot \ldots \cdot \det(D_p)}_{\det B}$$

2.F.: $A \cdot B$ nicht invertierbar.

1. $\det(A \cdot B) = 0$ wegen (c).
2. Nach der Vorbemerkung ist A oder B nicht invertierbar, d.h. entsprechend (c) $\det A = 0$ oder $\det B = 0$, also $\det A \cdot \det B = 0$.

(d) A invertierbar $\Longrightarrow \det A \cdot \det A^{-1} \overset{(b)}{=} \det\underbrace{(A \cdot A^{-1})}_{E_n} = 1 \overset{(c)}{\Longrightarrow} \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

(e) $\det A = 0 \overset{5.5a}{\iff} \operatorname{rang} A < n \overset{3.25a}{\iff} \operatorname{rang} A^\top < n \overset{5.5a}{\iff} \det A^\top = 0 \implies \det A = \det A^\top$

$$\begin{aligned}
\det A \neq 0 \quad &\overset{5.5b}{\implies} A = \underbrace{C_1 \cdot \ldots \cdot C_l}_{\text{El.matrizen}} \\
&\implies \det A \overset{5.4}{=} \det C_1 \cdot \ldots \cdot \det C_l \overset{\sharp}{=} \det C_1^\top \cdot \ldots \cdot \det C_l^\top \\
&\qquad\qquad \overset{5.4}{=} \det C_l^\top \cdot \ldots \cdot C_1^\top \overset{2.12d}{=} \det(C_1 \cdot \ldots \cdot C_l)^\top = \det A^\top
\end{aligned}$$

[Zu $\sharp$: $S_j(\lambda)^\top = S_j(\lambda),\ Q^i_j(\lambda)^\top = Q^j_i(\lambda),\ P_i^{jT} = P_i^j$]

5.7 Laplacescher Entwicklungssatz

Sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt:

(a) $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{(ij)} \qquad (i = 1, \ldots, n)$
(Entwicklung nach der i-ten Zeile)

(b) $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{(ij)} \qquad (j = 1, \ldots, n)$
(Entwicklung nach der j-ten Spalte)

Beweis:

(a) Bereits im Beweis zu Satz 5.1 enthalten.

(b) Folgt aus (a) und 5.6e.

5.8 Folgerung

Sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ Dreiecksmatrix.
Dann gilt: $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Beweis: Übungsaufgabe.

5.9 Lemma

Sei K ein Körper, $A \in K^{m\times m},\ C \in K^{n\times n}$. Dann gilt:

(a) $B \in K^{m\times n} \implies \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$,

(b) $B \in K^{n\times m} \implies \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$.

Beweis:

(a) 1.F.: A nicht invertierbar. Dann $\det A = 0$ nach 5.6c.
Zeige: $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = 0$.

$A \in K^{m\times m}$ nicht invertierbar $\overset{5.5a}{\iff} \operatorname{rang} A < m \iff \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} < m$

$\implies \operatorname{rang} \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}}_{\in K^{(m+n)\times(m+n)}} < m + n \iff \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = 0$.

2.F.: A invertierbar.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1} \cdot B \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \overbrace{-A \cdot A^{-1} \cdot B + B}^{0} \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Det.mult.satz}}{\Longrightarrow} \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1} \cdot B \\ 0 & E_n \end{pmatrix}}_{=1 \text{ (obere Dreiecksmatrix!)}} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$$= \det \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \overset{\text{Lapl.Entw.satz}}{=} \det A \cdot \det C \quad .$$

(b) $$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} \overset{5.6e}{=} \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}^\top = \det \begin{pmatrix} A^\top & B^\top \\ 0 & C^\top \end{pmatrix} \overset{(a)}{=} \det A^\top \cdot \det C^\top$$

$$\overset{5.6e}{=} \det A \cdot \det C$$

$\boxed{\text{Komplementärmatrix, Cramersche Regel}}$

Die inverse Matrix lässt sich mit Hilfe von Determinanten berechnen („Komplementärmatrix"). Ausgangspunkt ist dabei der Laplacesche Entwicklungssatz:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \underbrace{(-1)^{i+j} \det A^{(ij)}}_{\tilde{a}_{ji}:=} = \det A \cdot \underbrace{\delta_{ii}}_{1} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Behauptung: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \tilde{a}_{jk} = \det A \cdot \delta_{ik} \quad (i, k = 1, \ldots, n)$ mit $\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det A^{(ij)}$.

Beweis:

$k = i$: Bereits gezeigt.

$k \neq i$: Ersetze in A die k-te Zeile durch die i-te Zeile (Bez.: $\hat{A}$) und entwickle nach der k-ten Zeile. Dann

$$\det \hat{A} = 0, \quad \hat{a}^{(l)} = \begin{cases} a^{(i)} & \text{falls } l = k \\ a^{(l)} & \text{falls } l \neq i \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \hat{A}^{(kj)} = A^{(kj)}; \quad \hat{a}_{kj} = a_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Somit $\sum\limits_{j=1}^{n} \hat{a}_{kj} \cdot (-1)^{k+j} \cdot \det \hat{A}^{(kj)} = \det \hat{A} = 0$,

also $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \underbrace{(-1)^{k+j} \cdot \det A^{(kj)}}_{\tilde{a}_{jk}} = 0 \quad (k \neq i)$

Insgesamt ergibt sich

5.10 Definition und Satz (Komplementärmatrix)

Sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$. Die Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit $\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det A^{(ji)}$ heißt Komplementärmatrix von A. Es gilt

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \det\, A \cdot E_n$$

Bemerkung: $\det A \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$

Beweis:
$A{\cdot}\tilde{A} = E_n$ ist bereits gezeigt.
$\tilde{A}{\cdot}A = (\tilde{A}^{\top\top}{\cdot}A^{\top\top}) = (A^{\top}{\cdot}\tilde{A}^{\top})^{\top} \overset{\sharp}{=} (A^{\top}{\cdot}\widetilde{A^{\top}})^{\top} = (\det\, A^{\top}{\cdot}E_n)^{\top} = \det\, A \cdot E_n$.
[Zu $\sharp$: $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A^{(ji)} \Longrightarrow (\tilde{A}^{\top})_{ij} = \tilde{a}_{ji} = (-1)^{(i+j)} \det A^{(ij)}$
$(A^{\top})_{ij} = a_{ji}, \quad (\widetilde{A^{\top}})_{ij} = (-1)^{i+j} \det((A^{\top})^{(ji)}) = (-1)^{i+j} \det A^{(ij)}$]

5.11 Cramersche Regel

Sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ invertierbar, $b \in K^n$ und $x \in K^n$ die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$. Dann gilt:

$$x_i = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det A} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

Beweis:
Es gilt $x = A^{-1}b \overset{5.10}{=} \frac{1}{\det A}\tilde{A} \cdot b$
$\Longrightarrow x_i = \frac{1}{\det A} \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \cdot b_j = \frac{1}{\det A} \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det A^{(ji)} \cdot b_j \quad (i = 1, \dots, n)$
$\overset{j\leftrightarrow i}{\Longrightarrow} x_j = \frac{1}{\det A} \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} b_i \cdot \det A^{(ij)} \quad (j = 1, \dots, n)$
$\overset{5.7\text{b}}{=} \frac{1}{\det A} \cdot \det(a_1, \dots, b_j, \dots, a_n),$ weil $A^{(ij)}$ nicht von der j-ten Spalte von A abhängt.